Über die periodischen Lösungen jupiternaher Planetoiden.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der

philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin.

Von **Felicyan Kępiński**

aus **Piotrków.**

Tag der Promotion: 15. März 1913.

195

Über die periodischen Lösungen jupiternaher Planetoiden.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der

philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin.

Von **Felicyan Kępiński**

aus **Piotrków.**

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Tag der Promotion: 15. März 1913.

Referenten:

Professor Dr. *F. Cohn,*

Professor Dr. *H. Struve.*

KIEL 1913
Druck von C. Schaidt (Inhaber Georg Oheim)

Einleitung.

Während die periodischen Lösungen für die Hecuba- und Hestiaplanetoiden, die durch $p = 1$, $s = 1$ resp. $p = 1$, $s = 2$ des Verhältnisses $(p+s)/p$ ihrer mittleren Bewegung zu der des Jupiter gekennzeichnet werden können, sich besonders eingehender Bearbeitung von Seiten der Herren *Hill* [1]), *Schwarzschild* [2]) und *Wilkens* [3]) zu erfreuen gehabt haben, erschien es noch wünschenswert, das Studium der periodischen Bahnen auch auf die näher am Jupiter gelegenen Planetoiden zu erweitern und somit die Reihe der unten zitierten Arbeiten, die sich mit den Grundlagen für die analytische Behandlung der periodischen Lösungen befassen, zu einem gewissen Abschluß zu bringen.

Die Inangriffnahme dieser Fragen erstreckt sich in vorliegender Arbeit auf die Fälle $p = 2$ und 3 der Planetoidenklasse $s = 1$ [4]), wo bekanntlich die weitaus bedeutendsten langperiodischen Glieder des Hauptteils mit der ersten und die des Komplementärteils der Störungsfunktion mit der $(2p-1)$. Potenz der Exzentrizitäten e, e' beginnen, und auf die Fälle $p = 3$ u. 5 der Planetoidenklasse $s = 2$ [4]), wo die langperiodischen Glieder des Hauptteils erst mit der zweiten und die des Komplementärteils mit der $2p$. Potenz von e, e' beginnen. Dabei wurde von den Neigungen und einer höheren als der 4. Potenz von e, e' Abstand genommen.

Der Gang der Untersuchung entwickelte sich folgendermaßen:

Aus der allen periodischen Bahnen gemeinschaftlichen Forderung, daß ihre Parameter (a, e) nur kurzperiodischen Änderungen unterworfen sein dürfen, entspringt eine unendliche Schar von Anfangskonstellationen, von denen aber nur vier, in die dritte Bedingung, welche Gleichheit und gleiche Richtung der Perihelbewegungen fordert, eingesetzt, zu unabhängigen Bestimmungen der zugehörigen Exzentrizitätswerte führen. Diese dritte Bedingung, die die streng kommensurablen Bahnen charakterisiert, liefert auch ein Kriterium über die Möglichkeit analytischer Lösungen und führt zur Angabe der innerhalb des *Sundman*schen [5]) Konvergenzgebietes den periodischen Bahnen zukommenden Wertkomplexe e, e' im asteroidischen und e, e', m'/m im allgemeinen Fall. Wo aber keine analytischen Lösungen möglich sind, muß die Planetoidenexzentrizität aus der Bedingung $d\varpi/dt = 0$, die mit der Perihelruhe identisch ist, mittels mechanischer Quadratur berechnet werden.

Die nach diesen Gesichtspunkten vorgenommenen Rechnungen brachten speziell für den Typus $^3/_2$ (Hildatypus) die Unmöglichkeit der analytischen Lösung des asteroidischen Falles (um es noch einmal hervorzuheben, bei der Annahme $e' \neq 0$) zu Tage. Als möglich erwies sie sich dagegen für *Wilkens*sche allgemeine periodische Lösungen, und dieses Resultat konnte, auf Grund analytischer Verwandtschaft der periodischen Lösungen der Planetoidentypen $p = 1, 2, 3, \ldots$, $s = 1$, auch auf den Typus $^4/_3$ (Thuletypus) übertragen werden.

Die auf außerhalb des *Sundman*schen Konvergenzgebietes liegende Werte von e und den Wert der Jupiterexzentrizität $e' = 0.04830933$ angewandte mechanische Quadratur stellte beim Typus $^3/_2$ die Perihelruhe bei $e = 0.5$, und beim Typus $^4/_3$ bei $e = 0.37$, für die Anfangskonstellationen $\varpi = \varpi'$ und $(p+1)\,M_0' - p\,M_0 = 180° h$, wo h eine gerade Zahl, fest. Was die letzteren (Anfangskonstellationen) anbetrifft, so wurden aus ihrer unendlichen Schar die sich durch die Symmetrie besonders auszeichnenden für allgemeine Werte von p ausgewählt. Ihre Bedeutung liegt darin, daß die Planeten in ihren Anfangslagen gar nicht an die Apsidenlinien gebunden sein müssen, wie es mitunter irrtümlich behauptet wird [6]).

Die auf Grund der mechanischen Quadratur abgeleiteten relativ zum Jupiter synodischen Bahnen gewähren ein approximatives Urteil über den Verlauf der zu erwartenden Störungen.

Wesentlich günstiger gestaltete sich die Frage nach der analytischen Auflösbarkeit bei den Typen $p = 3, 5$; $s = 2$. Für beide Fälle ($p = 3$ und 5) ließen sich innerhalb des *Sundman*schen »Konvergenzdreiecks« je zwei Schnitte (e, e') nachweisen, auf denen die analytische Lösung des asteroidischen Problems möglich war. Bezüglich der allgemeinen periodischen Lösungen machte sich, auf Grund der Zusammenstellung der Resultate für $p = 1$ (*Wilkens*) und $p = 3, 5$ für die Größe $f \sim m'/m$ die Tendenz geltend, in der Abhängigkeit von p gegen ein gewisses mittleres Massenverhältnis zu konvergieren. (Ein ähnliches Resultat ergab auch die Planetoidenklasse $s = 1$). Bemerkenswert war noch die Tatsache, daß der asteroidische Fall für innerhalb des Konvergenz-

---

[1]) Astronomical Journal Nr. 516 u. 519. [2]) Astronomische Nachrichten Nr. 3839.

[3]) Astronomische Abhandlungen, Nr. 8 u. 17 der Ergänz.-Hefte zu den Astr. Nachr. — Untersuchungen über eine neue Klasse periodischer Lösungen des Problems der drei Körper. Sitzungsberichte der k. Akad. d. Wiss. in Wien. Math.-naturw. Kl. Bd. 114, Abt. IIa.

[4]) Der sogen. Fall der rotierenden Ellipse für $e' = 0$ ist schon von *W. Dziewulski* für den Typus $^3/_2$ und von *W. Heinrich* für den Typus $^5/_3$ untersucht worden. A. N. Nr. 4373, 4604.

[5]) Über die Störungen der kleinen Planeten, speziell derjenigen, deren mittl. Bewegung das doppelte der mittl. Bewegung des Jupiters beträgt. Helsingfors 1901.

[6]) Vergl. hierzu z. B. die Abhandlung *M. Simonin*s: Sur l'orbite de 108 Hécube, Annales de l'observatoire de Nice T. VI, p. A7: » ... mais, tout d'abord, rendons-nous compte de ce fait, qu'il existe des solutions périodiques voisines de l'orbite d'Hécube, c'est-à-dire qu'il arrive un moment où les deux planètes, troublée et troublante, sont en conjonction en même temps que la première passe à très peu près au périhélie«.

kriteriums liegende Werte e, e' das Zusammenfallen der Perihelrichtungen verlangt.

Um die Oszillationen der elliptischen Elemente e und ϖ festzustellen, die innerhalb der Periode der periodischen Lösung durch die kurzperiodischen Glieder entstehen, entwickelte ich alsdann die entsprechenden Formeln für den allgemeinen Typus $(p+2)/p$ und führte sie numerisch für $p = 3$ durch. Es zeigte sich in dem letzteren Fall, daß die Perihellänge innerhalb der Periode $3 \cdot 2\pi/n'$ zwischen $-9°.6$ bis $+9°.6$ hin- und herpendelt, falls als Anfangswerte von e' und e der wahre Wert der Jupiterbahnexzentrizität und der ihm aus der Konvergenzbetrachtung zugeordnete Wert e_0 (asteroidischer Fall) angenommen werden; während die Säkularbewegung der Apsiden null ist, kann die periodische Schwankung derselben also recht erheblich werden.

Zum Schluß habe ich noch den Fall der rotierenden Ellipse für den Typus $^7/_5$ behandelt, wobei, in Analogie mit dem Hestiatypus, die Existenz der sogenannten symmetrischen periodischen Lösungen nur auf einer Seite der Kommensurabilitätsstelle und die der *Wilkens*schen asymmetrischen Lösungen dicht an der letzteren nachgewiesen werden konnte.

Bei allen diesen Fragen beruhte die rechnerische Schwierigkeit, wie schon aus der Höhe des Achsenverhältnisses α der jupiternahen Planetoiden von vornherein einleuchtet, auf der schwachen Konvergenz aller in Frage kommenden Reihen.

Die Anregung zu den folgenden Untersuchungen verdanke ich Herrn *Wilkens*, dem ich hierfür, sowie für seinen stets hilfsbereiten Rat im Laufe der Untersuchung meinen wärmsten Dank ausspreche.

Kapitel I. Theoretischer Teil.

§ 1. Bei Benutzung der *Delaunay*schen kanonischen Elemente

$$x_1 = k\beta\sqrt{a} \qquad x_2 = k\beta\sqrt{[a(1-e^2)]} \qquad x_3 = k'\beta'\sqrt{a'}$$
$$y_1 = M \qquad y_2 = \varpi - \varpi' \qquad y_3 = M'$$

des auf drei Freiheitsgrade reduzierbaren Dreikörperproblems in der Ebene und des diesem Falle entsprechenden Ausdrucks der charakteristischen Funktion [1]):

$$F = \mu\beta\beta'[(1/\Delta) - (r/r'^2)\cos V]$$

wo a, a' die halben großen Achsen, e, e' die Exzentrizitäten, M, M' die mittleren Anomalien, ϖ, ϖ' die Perihellängen, V den Winkel zwischen den Radienvektoren r und r', Δ die ihm gegenüberliegende Seite (m) (m') des Dreiecks Sonne (Masse 1), Jupiter (m'), Planetoid (m) und k, k', β, β', μ die Massenkonstanten

$$k^2 = 1+m \qquad \beta\mu = m/(1+m)$$
$$k'^2 = (1+m+m')/(1+m) \qquad \beta'\mu = (1+m)\,m'/(1+m+m')$$

bedeuten, nehmen die eingangs erwähnten hinreichenden Bedingungen für das Auftreten der periodischen Lösungen die Form an:

$$\frac{dx_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \frac{dy_2}{dt} = 0. \tag{1}$$

Bringen wir nun die *Leverrier*sche Reihenentwickelung des Klammerausdrucks von F auf die für alle Typen einheitliche Form:

$$a'F_1 = a'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos V\right) =$$
$$= S_0 + S_2(e'^2+e^2) + S_{04}e'^4 + S_{22}e'^2e^2 + S_{40}e^4 +$$
$$+ (\Sigma_{11}e'e + \Sigma_{13}e'^3e + \Sigma_{31}e'e^3)\cos(\zeta'-\zeta) + \Sigma_{22}e'^2e^2\cos 2(\zeta'-\zeta) +$$
$$+ P_{01}e'\cos\zeta' + P_{10}e\cos\zeta +$$
$$+ P_{02}e'^2\cos 2\zeta' + P_{11}e'e\cos(\zeta'+\zeta) + P_{20}e^2\cos 2\zeta +$$
$$+ P_{03}e'^3\cos 3\zeta' + P_{12}e'^2e\cos(2\zeta'+\zeta) + P_{21}e'e^2\cos(\zeta'+2\zeta) + P_{30}e^3\cos 3\zeta +$$
$$+ R_{12}e'^2e\cos(2\zeta'-\zeta) + R_{21}e'e^2\cos\zeta' + R_{30}e^3\cos\zeta +$$
$$+ Q_{03}e'^3\cos\zeta' + Q_{12}e'^2e\cos\zeta + Q_{21}e'e^2\cos(\zeta'-2\zeta) +$$
$$+ P_{04}e'^4\cos 4\zeta' + P_{13}e'^3e\cos(3\zeta'+\zeta) + P_{22}e'^2e^2\cos(2\zeta'+2\zeta) + P_{31}e'e^3\cos(\zeta'+3\zeta) + P_{40}e^4\cos 4\zeta +$$
$$+ R_{13}e'^3e\cos(3\zeta'-\zeta) + R_{22}e'^2e^2\cos 2\zeta' + R_{31}e'e^3\cos(\zeta'+\zeta) + R_{40}e^4\cos 2\zeta +$$
$$+ Q_{04}e'^4\cos 2\zeta' + Q_{13}e'^3e\cos(\zeta'+\zeta) + Q_{22}e'^2e^2\cos 2\zeta + Q_{31}e'e^3\cos(\zeta'-3\zeta)$$

worin S, Σ, P, Q, R Funktionen der *Laplace*schen Transzendenten, also von $\alpha = a/a'$ abhängig sind, und ζ, ζ' langperiodische Winkelargumente bedeuten und zwar

$$\text{für den Typus } (p+1)/p: \begin{cases} \zeta = (p+1)l' - pl - \varpi \\ \zeta' = (p+1)l' - pl - \varpi' \end{cases}$$
$$\text{für den Typus } (p+2)/p: \begin{cases} 2\zeta = (p+2)l' - pl - 2\varpi \\ 2\zeta' = (p+2)l' - pl - 2\varpi' \end{cases} \tag{2}$$

(l', l mittlere Längen).

In dem letzteren Falle [Typus $(p+2)/p$] treten dabei nur grade Potenzen der Exzentrizitäten auf, es sind also alle diejenigen Koeffizienten, bei denen die Summe der Indizes eine ungrade Zahl ist, wegzulassen. Die expliziten Ausdrücke für $S, \ldots R$ werden im folgenden angegeben werden.

Die Bedingungen (1) können auch, auf Grund der Bewegungsgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

des Flächensatzes und der Bezeichnungen (2), geschrieben werden:

$$\frac{\partial(a'F_1)}{\partial\zeta} = 0 \qquad \frac{\partial(a'F_1)}{\partial\zeta'} = 0$$
$$\frac{\beta'\mu}{k}\cdot\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e\sqrt{a}}\cdot\frac{\partial(a'F_1)}{\partial e} = \frac{\beta\mu}{k'}\cdot\frac{\sqrt{(1-e'^2)}}{e'\sqrt{a'}}\cdot\frac{\partial(a'F_1)}{\partial e'} \tag{3}$$

Die letzte Gleichung, welche im asteroidischen Fall $(m = 0)$ in

$$\frac{\partial(a'F_1)}{\partial e} = 0 \tag{3'}$$

übergeht, stellen wir noch nach *Wilkens* [1]) in der Form dar:

$$f = Z/N$$

wo

$$f = \frac{k'\beta'\mu}{k\beta\mu} = \frac{m'}{m}\cdot\frac{1+m}{\sqrt{(1+m+m')}} \sim \frac{m'}{m}$$

solange m, m' klein gegen die Sonnenmasse vorausgesetzt werden, und wo

[1]) *A. Wilkens*, Astr. Abh. Nr. 8, p. 5–6.

$$Z = \sqrt{a}\cdot e\cdot\sqrt{(1-e'^2)}\cdot\frac{\partial(a'F_1)}{\partial e'} \qquad N = e'\cdot\sqrt{(1-e^2)}\cdot\frac{\partial(a'F_1)}{\partial e}$$

und bezeichnen mit

$$f_1 = \frac{N}{e\,e'} = \frac{a'\sqrt{a}\cdot k}{\beta'\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}t}$$

den Ausdruck, aus welchem die Perihelbewegung folgt. Die Bedingungen (3) lassen sich explizite folgendermaßen ausdrücken:

$$\text{(I)}\quad\left\{\begin{aligned}
&(P_{10}+R_{30}e^2)\sin\zeta + 2(P_{20}+R_{40}e^2)\,e\sin 2\zeta + 3P_{30}e^2\sin 3\zeta + 4P_{40}e^3\sin 4\zeta + \\
&+e'\,[-(\Sigma_{11}+\Sigma_{31}e^2)\sin(\zeta'-\zeta) + (P_{11}+R_{31}e^2)\sin(\zeta'+\zeta) - 2Q_{21}\,e\sin(\zeta'-2\zeta) + \\
&\quad + 2P_{21}\,e\sin(\zeta'+2\zeta) - 3Q_{31}e^2\sin(\zeta'-3\zeta) + 3P_{31}e^2\sin(\zeta'+3\zeta)] + \\
&+e'^2[Q_{12}\sin\zeta - R_{12}\sin(2\zeta'-\zeta) + P_{12}\sin(2\zeta'+\zeta) + 2Q_{22}\,e\sin 2\zeta - \\
&\quad - 2\Sigma_{22}\,e\sin 2(\zeta'-\zeta) + 2P_{22}\,e\sin 2(\zeta'+\zeta)] + \\
&+e'^3[-\Sigma_{13}\sin(\zeta'-\zeta) + Q_{13}\sin(\zeta'+\zeta) - R_{13}\sin(3\zeta'-\zeta) + P_{13}\sin(3\zeta'+\zeta)] = 0
\end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)}\quad\left\{\begin{aligned}
&(P_{01}+Q_{03}e'^2)\sin\zeta' + 2(P_{02}+Q_{04}e'^2)\,e'\sin 2\zeta' + 3P_{03}e'^2\sin 3\zeta' + 4P_{04}e'^3\sin 4\zeta' + \\
&+e\,[(\Sigma_{11}+\Sigma_{13}e'^2)\sin(\zeta'-\zeta) + (P_{11}+Q_{13}e'^2)\sin(\zeta'+\zeta) + 2R_{12}\,e'\sin(2\zeta'-\zeta) + \\
&\quad + 2P_{12}\,e'\sin(2\zeta'+\zeta) + 3R_{13}e'^2\sin(3\zeta'-\zeta) + 3P_{13}e'^2\sin(3\zeta'+\zeta)] + \\
&+e^2[R_{21}\sin\zeta' + Q_{21}\sin(\zeta'-2\zeta) + P_{21}\sin(\zeta'+2\zeta) + 2R_{22}\,e'\sin 2\zeta' + \\
&\quad 2\Sigma_{22}\,e'\sin 2(\zeta'-\zeta) + 2P_{22}\,e'\sin 2(\zeta'+\zeta)] + \\
&+e^3[\Sigma_{31}\sin(\zeta'-\zeta) + R_{31}\sin(\zeta'+\zeta) + Q_{31}\sin(\zeta'-3\zeta) + P_{31}\sin(\zeta'+3\zeta)] = 0
\end{aligned}\right.$$

$$\text{(III)}\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\beta'\mu}{k}\cdot\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e\sqrt{a}}\big((P_{10}+Q_{12}e'^2)\cos\zeta + (\Sigma_{11}+\Sigma_{13}e'^2)\,e'\cos(\zeta'-\zeta) + (P_{11}+Q_{13}e'^2)\,e'\cos(\zeta'+\zeta) + \\
&\quad + R_{12}e'^2\cos(2\zeta'-\zeta) + P_{12}e'^2\cos(2\zeta'+\zeta) + R_{13}e'^3\cos(3\zeta'-\zeta) + P_{13}e'^3\cos(3\zeta'+\zeta) + \\
&\quad + 2e\,[S_2 + S_{22}e'^2 + (P_{20}+Q_{22}e'^2)\cos 2\zeta + R_{21}\,e'\cos\zeta' + Q_{21}\,e'\cos(\zeta'-2\zeta) + \\
&\qquad + P_{21}\,e'\cos(\zeta'+2\zeta) + R_{22}e'^2\cos 2\zeta' + \Sigma_{22}e'^2\cos 2(\zeta'-\zeta) + P_{22}e'^2\cos 2(\zeta'+\zeta)] + \\
&\quad + 3e^2[R_{30}\cos\zeta + P_{30}\cos 3\zeta + \Sigma_{31}\,e'\cos(\zeta'-\zeta) + R_{31}\,e'\cos(\zeta'+\zeta) + Q_{31}\,e'\cos(\zeta'-3\zeta) + \\
&\qquad + P_{31}\,e'\cos(\zeta'+3\zeta)] + \\
&\quad + 4e^3[S_{40} + R_{40}\cos 2\zeta + P_{40}\cos 4\zeta]\big) = \\
&= \frac{\beta\mu}{k'}\cdot\frac{\sqrt{(1-e'^2)}}{e'\sqrt{a'}}\big((P_{01}+R_{21}e^2)\cos\zeta' + (\Sigma_{11}+\Sigma_{31}e^2)\,e\cos(\zeta'-\zeta) + (P_{11}+R_{31}e^2)\,e\cos(\zeta'+\zeta) + \\
&\quad + Q_{21}e^2\cos(\zeta'-2\zeta) + P_{21}e^2\cos(\zeta'+2\zeta) + Q_{31}e^3\cos(\zeta'-3\zeta) + P_{31}e^3\cos(\zeta'+3\zeta) + \\
&\quad + 2e'\,[S_2 + S_{22}e^2 + (P_{02}+R_{22}e^2)\cos 2\zeta' + Q_{12}\,e\cos\zeta + R_{12}\,e\cos(2\zeta'-\zeta) + \\
&\qquad + P_{12}\,e\cos(2\zeta'+\zeta) + Q_{22}e^2\cos 2\zeta + \Sigma_{22}e^2\cos 2(\zeta'-\zeta) + P_{22}e^2\cos 2(\zeta'+\zeta)] + \\
&\quad + 3e'^2[Q_{03}\cos\zeta' + P_{03}\cos 3\zeta' + \Sigma_{13}\,e\cos(\zeta'-\zeta) + Q_{13}\,e\cos(\zeta'+\zeta) + R_{13}\,e\cos(3\zeta'-\zeta) + \\
&\qquad + P_{13}\,e\cos(3\zeta'+\zeta)] + \\
&\quad + 4e'^3[S_{04} + Q_{04}\cos 2\zeta' + P_{04}\cos 4\zeta']\big)\,.
\end{aligned}\right.$$

Es ist nun angebracht, die Trennung der Fälle $(p+1)/p$ und $(p+2)/p$ vorzunehmen.

§ 2. Typus $(p+1)/p$. Aus den Gleichungen (I) und (II) geht unmittelbar hervor, daß sie durch

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= 180^\circ\cdot h\\ \zeta_0' &= 180^\circ\cdot h'\end{aligned}\qquad h,\ h' \text{ ganzzahlig} \qquad (4)$$

befriedigt werden können, wo unter ζ_0, ζ_0' die Werte von ζ, ζ' zu der Anfangsepoche $t = 0$, also

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= (p+1)\,M_0' - p\,M_0 - (p+1)\,\Delta\varpi\\ \zeta_0' &= (p+1)\,M_0' - p\,M_0 - p\cdot\Delta\varpi\end{aligned}\qquad \Delta\varpi = \varpi-\varpi' \qquad (5)$$

verstanden sein mögen.

Die Bedingungen (4), die ja drei Unbekannte M_0, M_0', $\Delta\varpi$ enthalten, geben Anlaß zu einer unendlichen Schar von Anfangskonstellationen. Greift man aber aus ihnen zuerst diejenigen heraus, in welchen

$$M_0 = 180^\circ\cdot g \quad (g = 0,\ 1)$$

ist, d. h. der Planetoid in jedem Falle in seiner Apsidenlinie steht, so bekommt man für die Anfangslage des Jupiter:

$$M_0' = 180^\circ\big(h' - [p/(p+1)]\,(h-g)\big);$$

steht dagegen zur Zeit $t = 0$ der Jupiter in seiner Apsidenlinie, d. h. ist $\quad M_0' = 180^\circ\cdot g' \quad (g' = 0,\ 1)$

so ergibt sich für die Anfangslage des Planetoiden

$$M_0 = 180^\circ\big(h - [(p+1)/p]\,(h'-g')\big)\,.$$

Für die Perihellage hat man immer die Formel:

$$\Delta\varpi = 180^\circ\cdot(h'-h)\,.$$

Setzen wir alsdann die Lösungen (4) in die dritte Bedingungsgleichung (III) ein, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\text{(III')}\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\beta'\mu}{k}\cdot\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e\sqrt{a}}\big([P_{10}+(P_{12}+Q_{12}+R_{12})\,e'^2]\cos 180^\circ\cdot h + [\Sigma_{11}+(\Sigma_{13}+R_{13})\,e'^2]\,e'\cos 180^\circ(h'-h) + \\
&\quad + [P_{11}+(P_{13}+Q_{13})\,e'^2]\,e'\cos 180^\circ(h'+h) + 2e\,[S_2 + P_{20} + (S_{22}+\Sigma_{22}+P_{22}+Q_{22}+R_{22})\,e'^2 + \\
&\quad + (P_{21}+Q_{21}+R_{21})\,e'\cos 180^\circ h'] + 3e^2\,[(P_{30}+R_{30})\cos 180^\circ h + (\Sigma_{31}+Q_{31})\,e'\cos 180^\circ(h'-h) + \\
&\quad + (P_{31}+R_{31})\,e'\cos 180^\circ(h'+h)] + 4e^3\,[S_{40}+P_{40}+R_{40}]\big) = \\
&= \frac{\beta\mu}{k'}\cdot\frac{\sqrt{(1-e'^2)}}{e'\sqrt{a'}}\big([P_{01}+(P_{21}+Q_{21}+R_{21})\,e^2]\cos 180^\circ h' + [\Sigma_{11}+(\Sigma_{31}+Q_{31})\,e^2]\,e\cos 180^\circ(h'-h) + \\
&\quad + [P_{11}+(P_{31}+R_{31})\,e^2]\,e\cos 180^\circ(h'+h) + 2e'\,[S_2 + P_{02} + (S_{22}+\Sigma_{22}+P_{22}+Q_{22}+R_{22})\,e^2 + \\
&\quad + (P_{12}+Q_{12}+R_{12})\,e\cos 180^\circ h] + 3e'^2\,[(P_{03}+Q_{03})\cos 180^\circ h' + (\Sigma_{13}+R_{13})\,e'\cos 180^\circ(h'-h) + \\
&\quad + (P_{13}+Q_{13})\,e\cos 180^\circ(h'+h)] + 4e'^3\,[S_{04}+P_{04}+Q_{04}]\big)\,.
\end{aligned}\right.$$

Diese Relation wird dazu dienen, die miteinander verträglichen Exzentrizitätswerte e, e' zu liefern. Maßgebend dafür, wie man sich auf Grund von (III′) überzeugen kann, sind die folgenden Möglichkeiten:

1) h, h' beide gerade
2) h gerade, h' ungerade
3) h ungerade, h' gerade
4) h, h' beide ungerade.

in dem Fall 1)	$M_0' =$	$h\cdot 180°/(p+1)$	resp.	$180° + (h-1)\cdot 180°/(p+1)$	$\Delta\varpi = 0°$
» » » 2)	»	$= 180° + h\cdot 180°/(p+1)$	»	$(h-1)\cdot 180°/(p+1)$	$\Delta\varpi = 180°$
» » » 3)	»	$= 180° + h\cdot 180°/(p+1)$	»	$(h-1)\cdot 180°/(p+1)$	$\Delta\varpi = 180°$
» » » 4)	»	$= h\cdot 180°/(p+1)$	»	$180° + (h-1)\cdot 180°/(p+1)$	$\Delta\varpi = 0°$.

Ist andererseits zur Zeit $t = 0$ $\quad M_0' = 0°$ resp. $180°$

so gehören dazu die folgenden Werte der mittleren Anomalie des Planetoiden:

1)	$M_0 =$	$-h'\cdot 180°/p$	resp.	$180° - (h'-1)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 0°$
2)	»	$= 180° - h'\cdot 180°/p$	»	$-(h'-1)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 180°$
3)	»	$= 180° - h'\cdot 180°/p$	»	$-(h'-1)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 180°$
4)	»	$= -h'\cdot 180°/p$	»	$180° - (h'-1)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 0°$.

§ 3. Typus $(p+2)/p$. Wie schon oben erwähnt wurde, fehlen bei diesem Typus in der Entwickelung von $a' F_1$ die Glieder ungrader Ordnung in bezug auf e, e'. Die sich entsprechend reduzierenden Bedingungen (I) und (II) lassen erkennen, daß sie durch

$$\begin{aligned} \zeta_0 + \zeta_0' &= 180°\cdot h \\ \zeta_0 - \zeta_0' &= 180°\cdot h' \end{aligned} \qquad h, h' \text{ ganzzahlig} \qquad (4')$$

erfüllt werden, wo

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= {}^1/_2[(p+2)M_0' - pM_0 - (p+2)\Delta\varpi] \\ \zeta_0' &= {}^1/_2[(p+2)M_0' - pM_0 - p\cdot\Delta\varpi] \end{aligned} \qquad (5')$$

und $\Delta\varpi = \varpi - \varpi' = -180°\cdot h'$ ist.

Die sich durch ihre Symmetrie besonders auszeichnenden Anfangskonstellationen, nach vier möglichen Ansätzen über h, h' geordnet, sind

A) wenn $M_0 = 0°$ resp. $180°$:

1)	$M_0' =$	$(h+h')\cdot 180°/(p+2)$	resp.	$180° + (h+h'-2)\cdot 180°/(p+2)$	$\Delta\varpi = 0°$
2)	»	$= 180° + (h+h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$(h+h'-2)\cdot 180°/(p+2)$	$\Delta\varpi = 180°$
3)	»	$= (h+h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$180° + (h+h'-2)\cdot 180°/(p+2)$	$\Delta\varpi = 0°$
4)	»	$= 180° + (h+h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$(h+h'-2)\cdot 180°/(p+2)$	$\Delta\varpi = 180°$;

B) wenn $M_0' = 0°$ resp. $180°$:

1)	$M_0 =$	$-(h-h')\cdot 180°/(p+2)$	resp.	$180° - (h-h'-2)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 0°$
2)	»	$= 180° - (h-h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$-(h-h'-2)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 180°$
3)	»	$= -(h-h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$180° - (h-h'-2)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 0°$
4)	»	$= 180° - (h-h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$-(h-h'-2)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 180°$.

Die Bedingungsgleichung (III) lautet in diesem Fall:

$$\text{(III″)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\beta'\mu}{k}\cdot\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e\sqrt{a}}\Big([\Sigma_{11} + (\Sigma_{13}+P_{13})e'^2]\,e'\cos 180°h' + [P_{11} + (Q_{13}+R_{13})e'^2]\,e'\cos 180°h + \\ &\quad + 2e[S_2 + (S_{22}+\Sigma_{22}+P_{22})e'^2 + (P_{20}+Q_{22}e'^2)\cos 180°(h+h') + R_{22}e'^2\cos 180°(h-h')] + \\ &\quad + 3e^2e'[(\Sigma_{31}+P_{31})\cos 180°h' + (Q_{31}+R_{31})\cos 180°h] + \\ &\quad + 4e^3[S_{40} + P_{40} + R_{40}\cos 180°(h+h')]\Big) = \\ &= \frac{\beta\mu}{k'}\cdot\frac{\sqrt{(1-e'^2)}}{e'\sqrt{a'}}\Big([\Sigma_{11} + (\Sigma_{31}+P_{31})e^2]\,e\cos 180°h + [P_{11} + (Q_{31}+R_{31})e^2]\,e\cos 180°h + \\ &\quad + 2e'[S_2 + (S_{22}+\Sigma_{22}+P_{22})e^2 + (P_{02}+R_{22}e^2)\cos 180°(h-h') + Q_{22}e^2\cos 180°(h+h')] + \\ &\quad + 3e'^2e[(\Sigma_{13}+P_{13})\cos 180°h' + (Q_{13}+R_{13})\cos 180°h] + \\ &\quad + 4e'^3[S_{04} + P_{04} + Q_{04}\cos 180°(h-h')]\Big)\,. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (III′) und (III″) bilden die Grundlagen für die analytische Auflösbarkeit der *Wilkens*schen allgemeinen periodischen Lösungen. Sie stellen bei fixierter Kommensurabilität und bei bestimmter Verfügung über h und h' eine algebraische Gleichung zwischen e, e' und dem Massenverhältnis f dar, und ihre analytische Lösung ist nur dann erlaubt, wenn e und e' innerhalb des *Sundman*schen Konvergenzkriteriums

Was die Anfangskonstellationen anbetrifft, so ist, infolge von (4) und (5), gar nicht erforderlich, daß die Planeten zur Zeit $t = 0$, wo die periodische Bahn ihren Anfang nimmt, in den Apsidenlinien liegen.

Nehmen wir an, daß zur Epoche $t = 0$

$$M_0 = 0° \text{ resp. } 180°$$

so ergibt sich für den Planetoidentypus $(p+1)/p$

in dem Fall 1)	$M_0' =$	$h\cdot 180°/(p+1)$	resp.	$180° + (h-1)\cdot 180°/(p+1)$	$\Delta\varpi = 0°$
» » » 2)	»	$= 180° + h\cdot 180°/(p+1)$	»	$(h-1)\cdot 180°/(p+1)$	$\Delta\varpi = 180°$
» » » 3)	»	$= 180° + h\cdot 180°/(p+1)$	»	$(h-1)\cdot 180°/(p+1)$	$\Delta\varpi = 180°$
» » » 4)	»	$= h\cdot 180°/(p+1)$	»	$180° + (h-1)\cdot 180°/(p+1)$	$\Delta\varpi = 0°$.

Ist andererseits zur Zeit $t = 0$ $\quad M_0' = 0°$ resp. $180°$

so gehören dazu die folgenden Werte der mittleren Anomalie des Planetoiden:

1)	$M_0 =$	$-h'\cdot 180°/p$	resp.	$180° - (h'-1)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 0°$
2)	»	$= 180° - h'\cdot 180°/p$	»	$-(h'-1)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 180°$
3)	»	$= 180° - h'\cdot 180°/p$	»	$-(h'-1)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 180°$
4)	»	$= -h'\cdot 180°/p$	»	$180° - (h'-1)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 0°$.

erfüllt werden, wo

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= {}^1/_2[(p+2)M_0' - pM_0 - (p+2)\Delta\varpi] \\ \zeta_0' &= {}^1/_2[(p+2)M_0' - pM_0 - p\cdot\Delta\varpi] \end{aligned} \qquad (5')$$

und $\Delta\varpi = \varpi - \varpi' = -180°\cdot h'$ ist.

Die sich durch ihre Symmetrie besonders auszeichnenden Anfangskonstellationen, nach vier möglichen Ansätzen über h, h' geordnet, sind

A) wenn $M_0 = 0°$ resp. $180°$:

1)	$M_0' =$	$(h+h')\cdot 180°/(p+2)$	resp.	$180° + (h+h'-2)\cdot 180°/(p+2)$	$\Delta\varpi = 0°$
2)	»	$= 180° + (h+h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$(h+h'-2)\cdot 180°/(p+2)$	$\Delta\varpi = 180°$
3)	»	$= (h+h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$180° + (h+h'-2)\cdot 180°/(p+2)$	$\Delta\varpi = 0°$
4)	»	$= 180° + (h+h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$(h+h'-2)\cdot 180°/(p+2)$	$\Delta\varpi = 180°$;

B) wenn $M_0' = 0°$ resp. $180°$:

1)	$M_0 =$	$-(h-h')\cdot 180°/(p+2)$	resp.	$180° - (h-h'-2)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 0°$
2)	»	$= 180° - (h-h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$-(h-h'-2)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 180°$
3)	»	$= -(h-h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$180° - (h-h'-2)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 0°$
4)	»	$= 180° - (h-h')\cdot 180°/(p+2)$	»	$-(h-h'-2)\cdot 180°/p$	$\Delta\varpi = 180°$.

Die Bedingungsgleichung (III) lautet in diesem Fall:

$$\text{(III″)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\beta'\mu}{k}\cdot\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e\sqrt{a}}\Big([\Sigma_{11} + (\Sigma_{13}+P_{13})e'^2]\,e'\cos 180°h' + [P_{11} + (Q_{13}+R_{13})e'^2]\,e'\cos 180°h + \\ &\quad + 2e[S_2 + (S_{22}+\Sigma_{22}+P_{22})e'^2 + (P_{20}+Q_{22}e'^2)\cos 180°(h+h') + R_{22}e'^2\cos 180°(h-h')] + \\ &\quad + 3e^2e'[(\Sigma_{31}+P_{31})\cos 180°h' + (Q_{31}+R_{31})\cos 180°h] + \\ &\quad + 4e^3[S_{40} + P_{40} + R_{40}\cos 180°(h+h')]\Big) = \\ &= \frac{\beta\mu}{k'}\cdot\frac{\sqrt{(1-e'^2)}}{e'\sqrt{a'}}\Big([\Sigma_{11} + (\Sigma_{31}+P_{31})e^2]\,e\cos 180°h + [P_{11} + (Q_{31}+R_{31})e^2]\,e\cos 180°h + \\ &\quad + 2e'[S_2 + (S_{22}+\Sigma_{22}+P_{22})e^2 + (P_{02}+R_{22}e^2)\cos 180°(h-h') + Q_{22}e^2\cos 180°(h+h')] + \\ &\quad + 3e'^2e[(\Sigma_{13}+P_{13})\cos 180°h' + (Q_{13}+R_{13})\cos 180°h] + \\ &\quad + 4e'^3[S_{04} + P_{04} + Q_{04}\cos 180°(h-h')]\Big)\,. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (III′) und (III″) bilden die Grundlagen für die analytische Auflösbarkeit der *Wilkens*schen allgemeinen periodischen Lösungen. Sie stellen bei fixierter Kommensurabilität und bei bestimmter Verfügung über h und h' eine algebraische Gleichung zwischen e, e' und dem Massenverhältnis f dar, und ihre analytische Lösung ist nur dann erlaubt, wenn e und e' innerhalb des *Sundman*schen Konvergenzkriteriums

$$1 + 2e + e^2 + {}^2/_3e^3 + {}^2/_3e^4 + \cdots \leq (1/\alpha)(1 - 2e' + e'^2 - {}^2/_3e'^3 + {}^2/_3e'^4 - \cdots)$$

liegen. Werden e, e' gemäß dem letzteren Kriterium gewählt, so wird sich zu jedem »erlaubten« Wertkomplex e, e' das entsprechende Massenverhältnis f aus (III′) resp. (III″) ergeben, wobei natürlich nur positive Werte von f in Betracht kommen. Speziell im asteroidischen Fall ($m = 0$), wo die rechte Seite von (III′) resp. (III″) zu null wird, hat man zu

prüfen, für welche Werte von e, e' die reduzierten Gleichungen (III′) und (III″) mit der *Sundman*schen Ungleichheit verträglich sind. Versagt aber die analytische Methode auf Grund der Reihen, so ist man auf die mechanische Quadratur angewiesen, deren notwendige Formeln hier niedergelegt sein mögen, unter Annahme der exzentrischen Anomalie als unabhängiger Variabler.

$$\begin{array}{l|l} \varepsilon - e\sin\varepsilon = M_0 + n't\cdot(p+s)/p & \varepsilon' - e'\sin\varepsilon' = M_0' + n't \\ r\sin v \;\; = a\sqrt{(1-e^2)}\cdot\sin\varepsilon & r'\sin v' \;\; = a'\sqrt{(1-e'^2)}\cdot\sin\varepsilon' \\ r\cos v \;\; = a(\cos\varepsilon - e) & r'\cos v' \;\; = a'(\cos\varepsilon' - e') \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\Delta/r')^2 &= 1 + (r/r')^2 - 2(r/r')\cos V \\ -R &= (a'/\Delta)^2\cdot(r/\Delta)\left(1 - [1-(\Delta/r')^3]\cdot(r'/r)\cos V\right) \\ S &= -(a'/\Delta)^2\cdot(r'/\Delta)\,[1-(\Delta/r')^3]\sin V \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[-R\cos v + S(1+r/p)\sin v]\,(r/a)\,\mathrm{d}\varepsilon$$

wo ε, ε' resp. v, v' exzentrische resp. wahre Anomalien und

$$V = v - v' + \Lambda\varpi$$

ist.

§ 4. Im Anschluß an die oben besprochenen Werte von e und e', die dem asteroidischen Fall zukommen (sie werden in der Folge numerisch aufgeführt), untersuche ich nunmehr die kurzperiodischen Oszillationen der elliptischen Elemente a, e und ϖ, um einen Überblick über die Größe und den Verlauf derselben zu erhalten, und zwar für die Planetoidenklasse $(p+2)/p$, innerhalb der Bewegungsperiode $p\cdot 2\pi/n'$ oder 2π, wenn ich jedesmal $n' = p$ ansetze, was nur auf die Festlegung der Zeiteinheit hinausläuft. Benutzt wird dazu die Entwickelung der Störungsfunktion, wie sie bei *Charlier* im 1. Bande seiner Vorlesungen über die Mechanik des Himmels, p. 310–315, oder teilweise auch in *Wilkens'* Untersuchungen über *Poincaré*sche periodische Lösungen des Problems der drei Körper, p. 7–8 zu finden ist. Ihr liegen die vier kanonischen Elemente

$$\begin{array}{lll} \Lambda = m\sqrt{a} & & \xi \cong \sqrt{\Lambda}\cdot e\cos\varpi \\ \lambda = \text{mittl. Länge } l & & \eta \cong -\sqrt{\Lambda}\cdot e\sin\varpi \end{array}$$

die durch die Gleichungen

$$\begin{array}{llll} \mathrm{d}\Lambda/\mathrm{d}t = & \partial F/\partial\lambda & \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t = & \partial F/\partial\eta \\ \mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t = & -\partial F/\partial\Lambda & \mathrm{d}\eta/\mathrm{d}t = & -\partial F/\partial\xi \end{array}$$

bestimmt werden, zugrunde, und es soll hier, nach Aufstellung der partiellen Differentialquotienten von F, Rücksicht genommen werden auf die Anfangskonstellationen und die Anfangswerte e_0 und e_0', um welche eben a, e und ϖ innerhalb der Periode 2π schwanken. Was die Anfangslage der Perihele anbetrifft, so müssen sie, wie es sich bei den numerischen Ausführungen zeigen wird, zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen, soweit wenigstens das *Sundman*sche Dreiecksgebiet von Exzentrizitäten in Frage kommt, und wir setzen daher: $\varpi_0 = \varpi_0' = 0$, $\xi_0 = e_0\sqrt{\Lambda_0}$, $\xi_0' = e_0'\sqrt{\Lambda_0'}$ $\eta_0 = \eta_0' = 0$ an, wo Λ_0 und Λ_0' aus den Relationen

$$\begin{array}{lll} \Lambda_0 = m\sqrt{a_0} & & a_0^3(p+2)^2 = 1 \\ \Lambda_0' = m'\sqrt{a'} & & a'^3p^2 = 1+m' \end{array}$$

zu entnehmen sind.

Alsdann ergeben sich, wenn ich gleich den Übergang von kanonischen zu den klassischen Elementen ausführe, folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m'}\cdot\frac{\mathrm{d}\sqrt{a}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\alpha_0}{a'}[\sin 2t - 2e_0'\sin(p-2)t + 2e_0\sin(p+4)t] + \left(\frac{1}{\Delta_0}\right)_\lambda' + \\ &+ e_0'\left[\frac{a_0a'}{\Delta_0^3}[{}^1/_2\sin(p-2)t + {}^3/_2\sin(p+2)t] + \left(\frac{a_0a'}{\Delta_0^3}\right)_\lambda'[{}^1/_2\cos(p-2)t + (1/\alpha)\cos pt - {}^3/_2\cos(p+2)t]\right] + \\ &+ e_0\left[\frac{a_0a'}{\Delta_0^3}[-\alpha\sin(p+2) - \sin(p+4)t] + \left(\frac{a_0a'}{\Delta_0^3}\right)_\lambda'[-{}^3/_2\cos pt + \alpha\cos(p+2)t + {}^1/_2\cos(p+4)t]\right] \end{aligned}$$

$\left[\left(\;\right)_\lambda'$ bedeuten die 1. partiellen Derivierten nach $\lambda\right]$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{a_0}}{m'}\cdot\frac{\mathrm{d}(\sqrt[4]{a}\cdot e\cos\varpi)}{\mathrm{d}t} &= (\alpha_0/a')\cdot(-{}^3/_2\sin pt + {}^1/_2\sin(p+4)t + e_0'(\sin 4t - 3\sin 2pt) + e_0[{}^1/_4\sin 2(p+1)t + {}^3/_4\sin 2(p+3)t]) + \\ &+ (a_0a'/\Delta_0^3)\cdot[{}^3/_2\sin pt - \alpha\sin(p+2)t - {}^1/_2\sin(p+4)t] + \\ &+ e_0'((a_0a'/\Delta_0^3)\cdot[-{}^1/_4\sin 4t + {}^3/_4\sin 2pt + {}^3/_4\sin 2(p+2)t] + \\ &\quad + (a_0^2a'^2/\Delta_0^5)\cdot[{}^{33}/_8\sin 2t - {}^3/_4\varepsilon\sin 4t + {}^9/_8\sin 2(p-1)t - {}^3/_8\sin 6t + {}^3/_4(3/\alpha-\alpha)\sin 2pt - \\ &\quad - {}^{21}/_4\sin 2(p+1)t - {}^9/_4(1/3\alpha-\alpha)\sin 2(p+2)t + {}^9/_8\sin 2(p+3)t]) + \\ &+ e_0((a_0a'/\Delta_0^3)\cdot[-{}^1/_4\sin 2(p+1)t - {}^1/_2\alpha\sin 2(p+2)t - {}^3/_4\sin 2(p+3)t] + \\ &\quad + (a_0^2a_0'^2/\Delta_0^5)\cdot[-{}^{27}/_8\sin 2pt + {}^9/_2\alpha\sin 2(p+1)t + {}^3/_2({}^3/_2-\alpha^2)\sin 2(p+2)t - \\ &\quad - {}^3/_2\alpha\sin 2(p+3)t - {}^3/_8\sin 2(p+4)t]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{a_0}}{m'}\cdot\frac{\mathrm{d}(\sqrt[4]{a}\cdot e\sin\varpi)}{\mathrm{d}t} &= (\alpha_0/a')\cdot({}^3/_2\cos pt - {}^1/_2\cos(p+4)t + e_0'(-\cos 4t + 3\cos 2pt) + e_0[\cos 2t - {}^1/_4\cos 2(p+1)t - {}^3/_4\cos 2(p+3)t]) \\ &+ (a_0a'/\Delta_0^3)\cdot[-{}^3/_2\cos pt + \alpha\cos(p+2)t + {}^1/_2\cos(p+4)t] + \\ &+ e_0'((a_0a'/\Delta_0^3)\cdot[{}^9/_4 + {}^1/_4\cos 4t - {}^3/_4\cos 2pt - {}^3/_4\cos 2(p+2)t] + \\ &\quad + (a_0^2a'^2/\Delta_0^5)\cdot[-{}^9/_4\varepsilon + {}^{21}/_8\cos 2t + {}^3/_4\varepsilon\cos 4t - {}^9/_8\cos 2(p-1)t + {}^3/_8\cos 6t - {}^3/_4(3/\alpha-\alpha)\cos 2pt + \\ &\quad + {}^{21}/_4\cos 2(p+1)t + {}^9/_4(1/3\alpha-\alpha)\cos 2(p+2)t - {}^9/_8\cos 2(p+3)t]) + \\ &+ e_0((a_0a'/\Delta_0^3)\cdot[-{}^3/_2\alpha - \cos 2t + {}^1/_4\cos 2(p+1)t + {}^1/_2\alpha\cos 2(p+2)t + {}^3/_4\cos 2(p+3)t] + \\ &\quad + (a_0^2a'^2/\Delta_0^5)\cdot[{}^{15}/_4 + {}^3/_2\alpha^2 - 3\alpha\cos 2t - {}^9/_4\cos 4t + {}^{27}/_8\cos 2pt - {}^9/_2\alpha\cos 2(p+1)t - \\ &\quad - {}^3/_2({}^3/_2-\alpha^2)\cos 2(p+2)t + {}^3/_2\alpha\cos 2(p+3)t + {}^3/_8\cos 2(p+4)t]) \;^*). \end{aligned}$$

*) $\varepsilon = 1/\alpha + \alpha$.

Hierzu sei an die bekannte Bezeichnung:

$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{i} A^i \cos i(\lambda'-\lambda) \qquad \frac{a_0 a'}{{\Delta_0}^3} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{i} B^i \cos i(\lambda'-\lambda) \qquad \frac{{a_0}^2 a'^2}{{\Delta_0}^5} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{i} C^i \cos i(\lambda'-\lambda)$$

erinnert, die uns erlaubt, die obigen drei Differentialgleichungen in gekürzter Form zu schreiben:

$$\frac{1}{m'}\cdot\frac{\mathrm{d}\sqrt{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha_0}{a'}\left[\sin 2t - 2e_0'\sin(p-2)t + 2e_0\sin(p+4)t\right] - \sum_{1}^{+\infty}{}^{i} A^i i \sin 2it - \sum_{(1-p)/2}^{+\infty}{}^{i}(g_{1i}e_0'+g_{2i}e_0)\sin(2i+p)t$$

$$\frac{\sqrt[4]{a_0}}{m'}\cdot\frac{\mathrm{d}(\sqrt[4]{a}\cdot e\cos\varpi)}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha_0}{a'}\left(-\tfrac{3}{2}\sin pt + \tfrac{1}{2}\sin(p+4)t + e_0'(\sin 4t - 3\sin 2pt) + e_0\left[\tfrac{1}{4}\sin 2(p+1)t + \tfrac{3}{4}\sin 2(p+3)t\right]\right) -$$
$$- \sum_{(1-p)/2}^{+\infty}{}^{i} k_{0i}\sin(2i+p)t - \sum_{1-p}^{+\infty}{}^{i}(k_{1i}e_0' + k_{2i}e_0)\sin 2(i+p)t$$

$$\frac{\sqrt[4]{a}}{m'}\cdot\frac{\mathrm{d}(\sqrt[4]{a}\cdot e\sin\varpi)}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha_0}{a'}\left(\tfrac{3}{2}\cos pt - \tfrac{1}{2}\cos(p+4)t + e_0'\left[-\cos 4t + 3\cos 2pt\right] + e_0\left[\cos 2t - \tfrac{1}{4}\cos 2(p+1)t - \tfrac{3}{4}\cos 2(p+3)t\right]\right)$$
$$+ \sum_{(1-p)/2}^{+\infty}{}^{i} l_{0i}\cos(2i+p)t + \sum_{1-p}^{+\infty}{}^{i}(l_{1i}e_0' + l_{2i}e_0)\cos 2(i+p)t\ .$$

Dabei bedeuten:

$$g_{1i} = -\tfrac{3}{4}[iB^{i-1} + (i+p)\cdot B^{i+p+1}] + (1/2\alpha)[iB^i + (i+p)\cdot B^{i+p}] + \tfrac{1}{4}[iB^{i+1} + (i+p)\cdot B^{i+p-1}]$$

$$g_{2i} = \tfrac{1}{4}[iB^{i-2} + (i+p)\cdot B^{i+p+2}] + \tfrac{1}{2}\alpha[iB^{i-1} + (i+p)\cdot B^{i+p+1}] - \tfrac{3}{4}[iB^i + (i+p)\cdot B^{i+p}]$$

$$k_{0i} = \tfrac{1}{4}(B^{i-2} - B^{i+p+2}) + \tfrac{1}{2}\alpha(B^{i-1} - B^{i+p+1}) - \tfrac{3}{4}(B^i - B^{i+p})$$

$$k_{1i} = -\tfrac{3}{8}(B^{i-2} - B^{i+2p+2}) - \tfrac{3}{8}(B^i - B^{i+2p}) + \tfrac{1}{8}(B^{i+p-2} - B^{i+p+2}) -$$
$$- \tfrac{9}{16}(C^{i-3} - C^{i+2p+3}) + \tfrac{9}{8}(1/3\alpha - \alpha)(C^{i-2} - C^{i+2p+2}) + \tfrac{21}{8}(C^{i-1} - C^{i+2p+1}) -$$
$$- \tfrac{3}{8}(3/\alpha - \alpha)(C^i - C^{i+2p}) + \tfrac{3}{16}(C^{i+p-3} - C^{i+p+3}) - \tfrac{9}{16}(C^{i+1} - C^{i+2p-1}) +$$
$$+ \tfrac{3}{8}\varepsilon(C^{i+p-2} - C^{i+p+2}) - \tfrac{33}{16}(C^{i+p-1} - C^{i+p+1})$$

$$k_{2i} = \tfrac{3}{8}(B^{i-3} - B^{i+2p+3}) + \tfrac{1}{4}\alpha(B^{i-2} - B^{i+2p+2}) + \tfrac{1}{8}(B^{i-1} - B^{i+2p+1}) +$$
$$+ \tfrac{3}{16}(C^{i-4} - C^{i+2p+4}) + \tfrac{3}{4}\alpha(C^{i-3} - C^{i+2p+3}) - \tfrac{3}{4}(\tfrac{3}{2} - \alpha^2)(C^{i-2} - C^{i+2p+2}) -$$
$$- \tfrac{9}{4}\alpha(C^{i-1} - C^{i+2p+1}) + \tfrac{27}{16}(C^i - C^{i+2p})$$

$$l_{0i} = \tfrac{1}{4}(B^{i-2} + B^{i+p+2}) + \tfrac{1}{2}\alpha(B^{i-1} + B^{i+p+1}) - \tfrac{3}{4}(B^i + B^{i+p})$$

$$l_{1i} = -\tfrac{3}{8}(B^{i-2} + B^{i+2p+2}) - \tfrac{3}{8}(B^i + B^{i+2p}) + \tfrac{1}{8}(B^{i+p-2} + B^{i+p+2}) + \tfrac{9}{8}B^{i+p} -$$
$$- \tfrac{9}{16}(C^{i-3} + C^{i+2p+3}) + \tfrac{9}{8}(1/3\alpha - \alpha)(C^{i-2} + C^{i+2p+2}) + \tfrac{21}{8}(C^{i-1} + C^{i+2p+1}) -$$
$$- \tfrac{3}{8}(3/\alpha - \alpha)(C^i + C^{i+2p}) + \tfrac{3}{16}(C^{i+p-3} + C^{i+p+3}) - \tfrac{9}{16}(C^{i+1} + C^{i+2p-1}) +$$
$$+ \tfrac{3}{8}\varepsilon(C^{i+p-2} + C^{i+p+2}) + \tfrac{21}{16}(C^{i+p-1} + C^{i+p+1}) - \tfrac{9}{8}\varepsilon C^{i+p}$$

$$l_{2i} = \tfrac{3}{8}(B^{i-3} + B^{i+2p+3}) + \tfrac{1}{4}\alpha(B^{i-2} + B^{i+2p+2}) + \tfrac{1}{8}(B^{i-1} + B^{i+2p+1}) - \tfrac{1}{2}(B^{i+p-1} + B^{i+p+1}) - \tfrac{3}{4}\alpha B^{i+p} +$$
$$+ \tfrac{3}{16}(C^{i-4} + C^{i+2p+4}) + \tfrac{3}{4}\alpha(C^{i-3} + C^{i+2p+3}) - \tfrac{3}{4}(\tfrac{3}{2} - \alpha^2)(C^{i-2} + C^{i+2p+2}) -$$
$$- \tfrac{9}{4}\alpha(C^{i-1} + C^{i+2p+1}) + \tfrac{27}{16}(C^i + C^{i+2p}) - \tfrac{9}{8}(C^{i+p-2} + C^{i+p+2}) - \tfrac{3}{2}\alpha(C^{i+p-1} + C^{i+p+1}) +$$
$$+ \tfrac{3}{4}(\tfrac{5}{2} + \alpha^2)C^{i+p}\ .$$

Die Integration unserer Differentialgleichungen liefert alsdann:

$$\sqrt{a} = \sqrt{a_0} + m'\frac{\alpha_0}{a'}\left(-\tfrac{1}{2}\cos 2t + \frac{2}{p-2}e_0'\cos(p-2)t - \frac{2}{p+4}e_0\cos(p+4)t\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}m'\sum_{1}^{+\infty}{}^{i} A^i\cos 2it + m'\cdot\sum_{(1-p)/2}^{+\infty}{}^{i}\frac{g_{1i}e_0' + g_{2i}e_0}{2i+p}\cos(2i+p)t$$

$$\sqrt[4]{a}\cdot e\cos\varpi = \sqrt[4]{a_0}\cdot e_0 + m'\cdot\frac{\alpha_0}{\sqrt[4]{a_0}\cdot a'}\left[\frac{3}{2p}\cos pt - \frac{1}{2(p+4)}\cos(p+4)t + e_0'\left(-\tfrac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{2p}\cos 2pt\right)\right.$$
$$\left. + e_0\left(-\frac{1}{8(p+1)}\cos 2(p+1)t - \frac{3}{8(p+3)}\cos 2(p+3)t\right)\right] +$$

$$+ m' \cdot \sum_{(1-p)/2}^{+\infty i} \frac{k_{0i}}{2i+p} \cos(2i+p)t + m' \cdot \sum_{1-p}^{+\infty i} \frac{k_{1i}e_0' + k_{2i}e_0}{2(i+p)} \cos 2(i+p)t$$

$$\sqrt{a} \cdot e \sin\varpi = m' \cdot \frac{\alpha_0}{\sqrt{a_0} \cdot a'} \left[\frac{3}{2p} \sin pt - \frac{1}{2(p+4)} \sin(p+4)t + e_0' \left(-\tfrac{1}{4} \sin 4t + \frac{3}{2p} \sin 2pt \right) \right.$$

$$\left. + e_0 \left(\tfrac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{8(p+1)} \sin 2(p+1)t - \frac{3}{8(p+3)} \sin 2(p+3)t \right) \right] +$$

$$+ m' \cdot \sum_{(1-p)/2}^{+\infty i} \frac{l_{0i}}{2i+p} \sin(2i+p)t + m' \cdot \sum_{1-p}^{+\infty i} \frac{l_{1i}e_0' + l_{2i}e_0}{2(i+p)} \sin 2(i+p)t \ .$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich nunmehr die Störungen von a, e und ϖ berechnen, und ich führe sie im folgenden für den Typus $^5/_3$ ($p = 3$) durch.

Kapitel II. Numerische Anwendungen.

Ich gehe nunmehr zur expliziten Angabe der S, Σ, P, Q und R-Koeffizienten über. Die Form der »säkularen« Koeffizienten S und Σ ist bekanntlich allen Typen gemeinschaftlich, und sie mögen in folgender Tafel für alle Fälle vorweggenommen werden.

§ 1. Typus $^3/_2$.

	i	$a' A^i$	$a' A^i_1$	$a' A^i_2$	$a' A^i_3$	$a' A^i_4$	K.-teil
$2S_0$	0	+1					
$4S_2$	0		+1	+1			
$^{16}/_3 S_{04}$	0		+1	+3	+3	+1	
$8S_{22}$	0		+1	+7	+12	+6	
$^{16}/_3 S_{40}$	0				+1	+1	
$2\Sigma_{11}$	1	+1	−1	−1			
$8\Sigma_{13}$	1	+1	−1	−11	−15	−6	
$8\Sigma_{31}$	1			−2	−9	−6	
$^{16}/_3 \Sigma_{22}$	2	+1	−1	+1	+4	+2	
$2P_{01}$	2	+5	+1				
$2P_{10}$	3	−6	−1				
$4P_{02}$	4	+52	+11	+1			
$4P_{11}$	5	−110	−22	−2			
$4P_{20}$	6	+57	+11	+1			
$8P_{03}$	6	+609.5	+131.5	+17	+1		
$8P_{12}$	7	−1841	−386.5	−50	−3		
$8P_{21}$	8	+1836	+378	+49	+3		
$8P_{30}$	9	−606	−123	−16	−1		
$8Q_{03}$	2	−65.5	−3.5	+11	+3		
$8Q_{12}$	3	+216	+22	−20	−6		
$8Q_{21}$	4	−154	−20	+9	+3		
$8R_{12}$	1	+17	−3.5	−10	−3		$-\frac{27}{2}\alpha$
$8R_{21}$	2	−80	−4	+18	+6		
$8R_{30}$	3	+66	+9	−8	−3		
$16P_{04}$	8	+7530	+1641	+247	+23	+1	
$16P_{13}$	9	−29538	−6334	−954	−90	−4	
$16P_{22}$	10	+43225	+9155	+1381	+132	+6	
$16P_{31}$	11	−83996:3	−17620:3	−888	−86	−4	
$16P_{40}$	12	+6779	+4234:3	+214	+21	+1	
$16Q_{04}$	4	−1836	−300	+56	+32	+4	
$16Q_{13}$	5	+6880	+1172	−116	−90	−12	
$16Q_{22}$	6	−8208	−1448	+64	+84	+12	
$16Q_{31}$	7	+9464:3	+1720:3	−4	−26	−4	
$16R_{13}$	3	+816	+124	−60	−30	−4	
$16R_{22}$	4	−3328	−578	+134	+84	+12	
$16R_{31}$	5	+4180	+788	−88	−78	−12	
$16R_{40}$	6	−1658	−994:3	+14	+24	+4	

Mit dem allen weiteren Rechnungen zugrunde gelegten Wert von α nach der Formel

$$\alpha = (1+m')^{-1/3} \cdot (^2/_3)^{2/3}$$

nämlich $\alpha = 0.7629000$ habe ich, auf Grund der *Leverrier*schen Reihen und Formeln (Annales de l'Observatoire de Paris, memoires, tome X) folgende Tabellen erhalten:

i	$a' A^i$	$a' A^i_1$	$a' A^i_2$	$a' A^i_3$	$a' A^i_4$
0	2.45811136	1.5265961	3.073779	6.707977	16.46498
1	1.0388908	2.0010438	3.028549	6.773700	16.50183
2	0.6168522	1.8780307	3.339197	6.862952	16.65634
3	0.3999926	1.6445613	3.546119	7.179983	16.90192
4	0.2703568	1.3938253	3.594989	7.592912	17.35890
5	0.1872374	1.1584382	3.504660	7.969649	18.03312
6	0.1317734	0.9501922	3.311657	8.223422	18.84235
7	0.0938056	0.7719709	3.052489	8.312983	19.66617
8	0.0673518	0.6226374	2.757814	8.231006	20.38698
9	0.0486812	0.4993240	2.451098	7.992520	20.90910
10	0.0353744	0.3985788	2.149058	7.624409	21.17236
11	0.0258174	0.3169441	1.862769	7.158568	21.14621
12	0.0189111	0.2512152	1.598975	6.626332	20.83398

S_2	+1.150094	P_{02}	+8.246405	P_{04}	+151.2367
		P_{11}	−13.272768	P_{13}	−483.8734
S_{04}	+8.87566	P_{20}	+5.318714	P_{22}	+579.9597
S_{22}	+25.29108			P_{31}	−308.6708
S_{40}	+4.34493	P_{03}	+33.72347	P_{40}	+61.55714
		P_{12}	−81.07828	Q_{04}	−25.04965
Σ_{11}	−1.995351	P_{21}	+64.85509	Q_{13}	+81.60478
		P_{30}	−17.26597	Q_{22}	−83.04079
Σ_{13}	−29.36158	Q_{03}	+1.292887	Q_{31}	+26.96937
Σ_{22}	+11.78297	Q_{12}	+1.072059	R_{13}	+2.15908
Σ_{31}	−20.75392	Q_{21}	−1.797226	R_{22}	−23.59615
		R_{12}	−6.281032	R_{31}	+34.31634
P_{01}	+2.481146	R_{21}	+5.552869	R_{40}	−13.38849
P_{10}	−2.022258	R_{30}	−1.088542		

Die korrespondierenden Begrenzungswerte von e, e', bei denen noch die Konvergenz der Reihen statthat, sind in diesem Fall nach dem *Sundman*schen Kriterium die folgenden Zahlen:

e'	e
0.0000	0.1440
0.0250	0.1158
0.0500	0.0874
0.0750	0.0588
0.1000	0.0300
0.1259	0.0000

Alsdann ergaben sich im asteroidischen Fall, wo, wie gesagt, die rechte Seite von (III′) verschwindet, zwei Kurvenzüge (e, e'), nämlich für die Ansätze:

1) h, h' beide gerade; ζ_0 u. ζ_0' Multipla von 360°; $\Delta\varpi = 0°$

2) h gerade, h' ungerade; ζ_0 Multiplum von 360°, ζ_0' Multiplum von 180°; $\Delta\varpi = 180°$

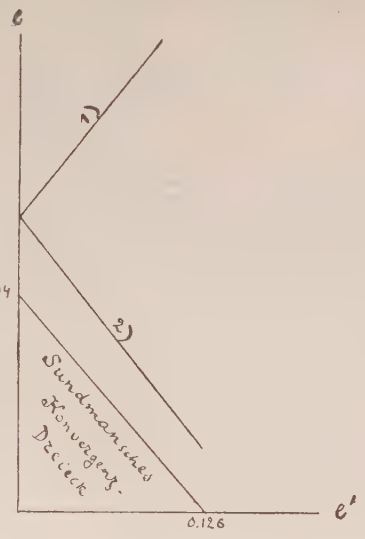
die aber, wie es die nebenstehende Zeichnung illustriert, außerhalb des *Sundman*schen Konvergenzdreiecks verlaufen. Speziell für $e' = 0.0483093$ (wahrer Wert der Jupiterexzentrizität) fand ich im ersten Fall

1) $e = 0.25744$

und im zweiten Fall

2) $e = 0.13768$

und diese Werte waren im Sinne roher erster Approximation bei Ausführung d. mechanischen Quadratur von Nutzen. Die anderen Ansätze über h, h' [3) u. 4)] lieferten negative Werte für e.



Figur 1.

Wie dem auch sei, hat diese Rechnung gezeigt, daß der asteroidische Fall ($m = 0, e' \neq 0$) auf analytischem Wege nicht auflösbar ist. Ob er überhaupt möglich ist, darauf gab erst die mechanische Quadratur Antwort.

Die Bestätigung der analytischen Unlösbarkeit des asteroidischen Falles gab die Durchführung der *Wilkens*schen Idee über allgemeine periodische Lösungen. Das Resultat enthalten die folgenden Tafeln, aus denen ohne weiteres ersichtlich ist, daß zu den brauchbaren Werten für e und e' keine verschwindend kleine oder unendlich große Werte für das Massenverhältnis f sich ergeben.

Tafeln für f.

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125
0.140	16.731					
0.125	14.553	5.927				
0.100	11.321	4.558				
0.075	8.326	3.340	1.678			
0.050	5.467	2.189	1.095	0.726		
0.025	2.702	1.081	0.539	0.357	0.263	
0.010	1.076	0.432	0.214	0.142	0.104	0.079

h gerade, h' ungerade

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125
0.140	15.106					
0.125	13.445	5.393				
0.100	10.709	4.295				
0.075	8.008	3.211	1.610			
0.050	5.333	2.137	1.071	0.715		
0.025	2.669	1.069	0.535	0.357	0.267	
0.010	1.070	0.428	0.214	0.143	0.107	0.085

h ungerade, h' gerade

Tafeln für $\log f_1$.

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125
0.140	0.6201n					
0.125	0.7711n	0.6444n				
0.100	0.9851n	0.9078n				
0.075	1.1951n	1.1386n	1.0094n			
0.050	1.4422n	1.3945n	1.3006n	1.1593n		
0.025	1.8093n	1.7641n	1.6851n	1.5865n	1.4307n	
0.010	2.2403n	2.2013n	2.1258n	2.0401n	1.9200n	1.6999n

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125
0.140	1.6288					
0.125	1.6306	1.6903				
0.100	1.6478	1.7077				
0.075	1.6929	1.7523	1.8526			
0.050	1.7903	1.8482	1.9476	2.0485		
0.025	2.0147	2.0703	2.1674	2.2678	2.3692	
0.010	2.3682	2.4220	2.5170	2.6165	2.7180	2.8191

Zur Vervollständigung dieses Resultates sei bemerkt, daß in den Fällen, wo h, h' beide gerade oder ungerade sind, d. h. wenn die Perihele zusammenfallen, überhaupt keine analytische Lösung möglich ist (f negativ). Während also weder der asteroidische ($m = 0$) noch der konträre ($m' = 0$) Fall innerhalb der Konvergenzschranken vorkommen können, ist bei meßbaren Massenverhältnissen eine Lösung möglich, und zwar, wenn die Perihele um 180° voneinander abstehen.

Ein Vergleich dieser Verhältnisse ($p = 2$) mit denjenigen des Hecubatypus ($p = 1$) [1]) läßt darauf schließen, daß der Bereich der Möglichkeit der analytischen Lösung sich mit der Steigerung der Zahl p verengt. Das erkennt man auch an den Beträgen der extremen Werte von f — es sind dies die beiden äußersten Zahlen der obigen Tafeln für f — die sich, wenn auch nur wenig, mit wachsendem p einander nähern.

Bereits die analytische Behandlung des asteroidischen Falles wies darauf hin, daß die verlangte Perihelruhe erst für hohe Beträge der Exzentrizität e zu erwarten ist. Genau tritt sie für den Wert e auf, für welchen

$$\int_0^{2\pi} [-R\cos v + S(1+r/p)\sin v]\, r/a \cdot \mathrm{d}\varepsilon = 0$$

ist (siehe p. 5⅞). Das Ergebnis der nach dieser Formel ausgeführten Rechnungen enthalten die folgenden Tafeln.

[1]) *A. Wilkens.* Astr. Abh., Erg.-Heft Nr. 8, p. 17–18.

ε	$e = 0.3$	$e = 0.4$	$e = 0.5$	$v - v'$	$\log r$
0°	−3.23995	−1.79668	−0.98559	0° 0′ 0″	0.297675
20	−3.29545		−1.06911	26 28 3.5	0.323106
40	−2.98882		−0.92103	48 36 16.6	0.388974
60	−2.33497	−1.18024	−0.45072	64 12 27.8	0.473766
80	−1.70968		+0.03630	73 6 54.0	0.559258
100	−1.31500		+0.27880	76 10 18.7	0.634864
120	−1.19696	−0.48205	+0.12488	74 35 13.1	0.695614
140	−1.28079		−0.41796	69 41 47.8	0.739533
160	−1.39722		−1.13142	62 51 20.1	0.765976
180	−1.34668	−1.49289	−1.61903	55 21 5.9	0.774796
200	−1.00562		−1.41279	48 21 5.9	0.765976
220	−0.44314		−0.15899	42 54 33.9	0.739533
240	+0.06695	+0.68805	+1.76641	40 0 53.9	0.695614
260	+0.26058		+2.68984	40 39 13.0	0.634864
280	+0.14212		+1.93304	45 50 33.5	0.559258
300	−0.07184	+0.32897	+0.83255	56 36 6.2	0.473766
320	−0.19688		+0.19091	73 43 37.6	0.388974
340	−0.18673		−0.03340	97 6 31.6	0.323106
360	−0.09326	−0.06462	−0.04115	124 38 54.1	0.297675
Mitt.	−1.10928	−0.51	+0.00694		

Fall: h, h' beide gerade.

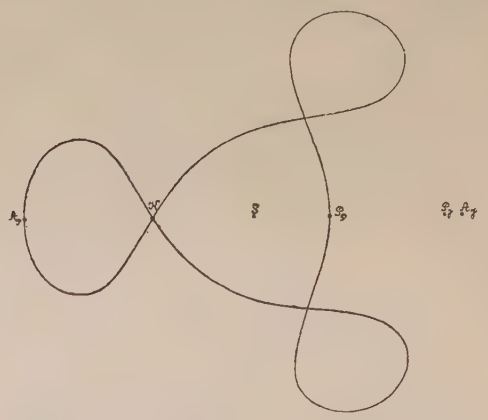
Danach kann man sich also mit dem genäherten Wert $e = 0.5$, für welchen in der Tat die Perihelbewegung so gut wie verschwindet, zufrieden geben.

ε	$e = 0.4$	$e = 0.46$	$e = 0.5$
0°	−1.17435	−0.84218	−0.66937
20		−0.90887	
40		−0.78861	
60	−0.67653	−0.38032	−0.21719
80		+0.08485	
100		+0.39855	
120	+0.15869	+0.41677	+0.57983
140		+0.06332	
160		−0.61257	
180	−1.30667	−1.35758	−1.38911
200		−1.69901	
220		−1.17248	
240	+0.22402	+0.71303	+0.98124
260		+2.45223	
280		+2.33095	
300	+0.72616	+1.17271	+1.50414
320		+0.34738	
340		+0.03514	
360	+0.00663	+0.01181	+0.01417
Mittel	−0.24	+0.03779	+0.19

Fall: h gerade, h' ungerade.

Der genauere Wert von e liegt in diesem Fall bei 0.45, indes habe ich ihn nicht weiter verfolgt.

Wenn man die diesen Exzentrizitätswerten zukommende Bewegung auf die Polarkoordinaten r, $v - v'$ bezieht, so zeigen die so entstehenden synodischen Bahnen in beiden Fällen sehr ähnliche Gestalt. Im ersten Fall (h, h' beide gerade, $e = 0.5$) fand ich die in Fig. 2 gezeichnete synodische Bahn.



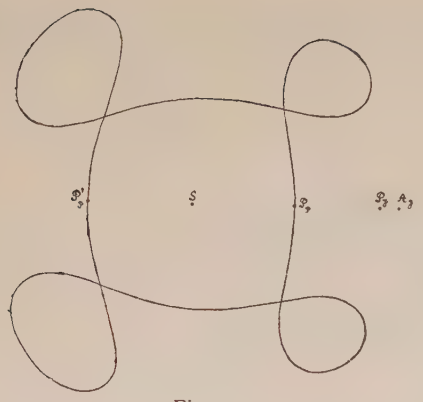
Figur 2.

Diese Zeichnung ist dahin zu deuten, daß der Planetoid, während er selbst drei und der Jupiter zwei Umläufe um die Sonne (S) ausführen, in bezug auf den zweimal von P_J (Perihel) nach A_J (Aphel) hin- und herpendelnden Jupiter, in der gezeichneten dreischleifenartigen Kurve von P_P über A_P nach P_P zurückläuft. Synchronisch treten die Konstellationen auf: $P_J P_P$ = Konjunktion in mittl. Länge l, l', $P_J A_P$ = Opposition in l, l' und abermals $P_J P_P$ = Konjunktion in l, l'. Der Kreuzungspunkt K entspricht der Konjunktion in wahrer Länge.

§ 2. Typus $^4/_3$. Wie aus folgender, keiner Erklärung bedürfenden Tafel ersichtlich, kommt der periodischen Lösung für diesen Asteroidentypus, falls sie der Konstellationsschar $A\varpi = 0$, $4M_0' - 3M_0 = 180° \cdot h$, h gerade Zahl, entstammt, der Exzentrizitätswert $e_0 = 0.37$ zu.

ε	$e = 0.4$	$e = 0.35$	$e = 0.368$	$v - v'$	$\log r$
0°	−2.21600	−3.05104	−2.71785	0° 0′ 0″	0.433523
20			−2.77275	18 30 50.8	0.448512
40			−2.48416	34 30 40.5	0.488987
60	−1.51015	−2.17191	−1.92350	46 25 20.1	0.544496
80			−1.43163	53 30 37.0	0.604126
100			−1.24649	56 16 2.0	0.659707
120	−1.11589	−1.57944	−1.40521	55 23 39.9	0.706158
140			−1.79645	51 53 39.2	0.740662
160			−2.14228	46 50 9.2	0.761789
180	−2.09522	−1.97668	−2.02103	41 14 55.6	0.768892
200			−0.90519	36 4 36.6	0.761789
220			+1.59647	32 11 9.2	0.740662
240	+5.81014	+4.07374	+4.62197	30 23 42.3	0.706158
260			+5.51364	31 29 49.6	0.659707
280			+3.87126	36 14 1.5	0.604126
300	+2.24370	+1.78540	+1.96715	45 11 43.0	0.544496
320			+0.77405	58 35 39.1	0.488987
340			+0.27387	75 54 5.0	0.448512
360	+0.16996	+0.18712	+0.18106	95 31 38.1	0.433523
Mitt.	+0.38	−0.22	−0.0433		

Die entsprechende synodische Bahn stellt die folgende Figur 3 dar.



Figur 3.

§ 3. Typus $^5/_3$.

1. Ich lasse der Reihe nach die Bedeutung der P, Q, R-Koeffizienten, in ihrer Abhängigkeit von den *Laplace*schen Transzendenten $a' A^i_j$, die numerischen Werte der letzteren, auf Grund von

$$\alpha = (1+m')^{-1/3} \cdot (^3/_5)^{2/3} = 0.71115246$$

und schließlich die Zahlenwerte von P, Q, R selbst folgen.[1])

	i	$a' A^i$	$a' A^i_1$	$a' A^i_2$	$a' A^i_3$	$a' A^i_4$
$4P_{02}$	3	+33.5	+ 9	+1		
$4P_{11}$	4	−72	−18	−2		
$4P_{20}$	5	+37.5	+ 9	+1		
$16P_{04}$	6	+ 9458:3	+ 2642:3	+166	+ 19	+ 1
$16P_{13}$	7	−36988:3	−10112:3	−636	− 74	− 4
$16P_{22}$	8	+17928	+ 4827	+913	+108	+ 6
$16P_{31}$	9	−11514	− 3066	−582	− 70	− 4
$16P_{40}$	10	+ 2760	+ 729	+139	+ 17	+ 1
$16Q_{04}$	3	− 2279:3	− 431:3	+ 47	+ 28	+ 4
$16Q_{13}$	4	+ 3028	+ 617	− 97	− 78	−12
$16Q_{22}$	5	− 3750	− 807	+ 53	+ 72	+12
$16Q_{31}$	6	+ 1474	+ 331	− 3	− 22	− 4
$16R_{13}$	2	+ 778:3	+ 107:3	− 49	− 26	− 4
$16R_{22}$	3	− 1206	− 239	+109	+ 72	+12
$16R_{31}$	4	+ 1620	+ 375	− 71	− 66	−12
$16R_{40}$	5	− 665	− 169	+ 11	+ 20	+ 4

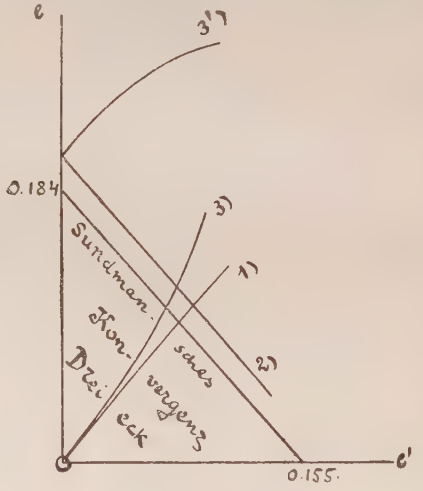
i	$a' A^i$	$a' A^i_1$	$a' A^i_2$	$a' A^i_3$	$a' A^i_4$
0	2.366906	1.104947	1.789059	2.970768	5.606856
1	0.915275	1.553742	1.741741	3.018169	5.620548
2	0.502984	1.400778	1.996216	3.062876	5.697824
3	0.302820	1.160805	2.124976	3.277196	5.811616
4	0.190297	0.925726	2.104101	3.528051	6.052097
5	0.122626	0.721864	1.973248	3.710459	6.401401
6	0.080336	0.554575	1.777269	3.774637	6.78215
7	0.053252	0.421546	1.552425	3.713092	7.10835
8	0.035609	0.31692	1.32400	3.54256	7.31485
9	0.023973	0.23819	1.10785	3.29077	7.36615
10	0.016230	0.17759	0.91271	2.98723	7.25490

S_2	+ 0.723501	P_{02}	+ 5.679173	Q_{04}	−11.37059
S_{04}	+ 3.935866	P_{11}	− 8.643163	Q_{13}	+37.21758
S_{22}	+10.36484	P_{20}	+ 3.267126	Q_{22}	−37.11501
S_{40}	+ 1.608304	P_{04}	+ 69.69970	Q_{31}	+11.65482
Σ_{11}	− 1.190104	P_{13}	−210.5002	R_{13}	− 1.23993
Σ_{13}	−12.34918	P_{22}	+237.7168	R_{22}	− 6.58184
Σ_{22}	+ 4.639795	P_{31}	−106.4743	R_{31}	+12.53504
Σ_{31}	− 8.046286	P_{40}	+ 22.44763	R_{40}	− 5.12630

Die *Sundman*schen Begrenzungswerte sind in diesem Fall:

e'	e
0.0000	0.1838
0.0250	0.1549
0.0500	0.1258
0.0750	0.0964
0.1000	0.0667
0.1250	0.0368
0.1555	0.0000

Das Nullsetzen der rechten Seite der Bedingungsgleichung (III″) führte auf den asteroidischen Fall, dessen Ergebnis durch die folgende Zeichnung illustriert sein möge:



Figur 4.

Danach zeigt sich, daß die analytische Lösung des asteroidischen Falles beim Planetoidentypus $^5/_3$ durchaus möglich ist, und zwar in den Fällen:

1) h, h' beide gerade, $\Delta\varpi = 0$;

die korrespondierenden Werte von e, e' sind z. B.

e'	e	
0.0100	0.0123	
0.0500	0.0607	
0.0750	0.0895	[Kurve 1)]

3) h ungerade, h' gerade, $\Delta\varpi = 0$ und

e'	e	
0.0100	0.0147	
0.0500	0.0754	
0.0750	0.1180	[Kurve 3)]

Was die anderen Lösungen [Kurve 2) u. 3′)] anbetrifft, so liegen sie, wie Figur 4 zeigt, außerhalb des Konvergenzgebietes und kommen hier nicht mehr in Betracht.

[1]) Die *Laplace*schen Transzendenten $a' A^i_j$ habe ich für diesen Typus nach den *Runkle*schen Tafeln berechnet.

Als möglich hat sich auch der konträre Fall ($m' = 0$) erwiesen. Da er aber für beinahe gleiche Wertkomplexe (e, e') auftritt, wie bei dem asteroidischen Fall, so beansprucht er kein weiteres Interesse.

Als Erweiterung dieses Resultats, bekam ich bezüglich der allgemeinen periodischen Lösungen folgende Tafeln:

Fall 2) h gerade, h' ungerade, $\Delta\varpi = 180°$.

Tafel für f.

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150
0.175	34.615						
0.150	22.647	9.499					
0.125	17.038	6.807	3.640				
0.100	12.920	5.104	2.562	1.867			
0.075	9.379	3.690	1.828	1.237	1.062		
0.050	6.113	2.399	1.184	0.790	0.606		
0.025	2.990	1.171	0.578	0.384	0.290	0.238	
0.010	1.168	0.459	0.227	0.151	0.114	0.092	0.082

Tafel für $\log f_1$.

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150
0.175	0.0537n						
0.150	0.3517n	0.2369n					
0.125	0.5122n	0.4810n	0.2760n				
0.100	0.6197n	0.6345n	0.5730n	0.2905n			
0.075	0.7020n	0.7554n	0.7715n	0.6757n	0.2701n		
0.050	0.7786n	0.8774n	0.9575n	0.9487n	0.8134n		
0.025	0.8932n	1.0671n	1.2206n	1.2761n	1.2430n	1.0604n	
0.010	1.0935n	1.3585n	1.5730n	1.6666n	1.6756n	1.5786n	1.1918n

Fall 4) h, h' beide ungerade, $\Delta\varpi = 180°$.

Tafel für f.

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150
0.175	18.599						
0.150	15.893	6.463					
0.125	13.212	5.368	2.732				
0.100	10.550	4.283	2.177	1.465			
0.075	7.905	3.207	1.627	1.094	0.824		
0.050	5.274	2.139	1.083	0.727	0.547		
0.025	2.651	1.075	0.543	0.363	0.273	0.219	
0.010	1.072	0.434	0.218	0.146	0.109	0.087	0.073

Tafel für $\log f_1$.

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150
0.175	1.1494						
0.150	1.0281	1.0961					
0.125	1.0108	1.0852	1.2013				
0.100	0.9994	1.0829	1.2097	1.3259			
0.075	0.9973	1.0955	1.2377	1.3637	1.4791		
0.050	1.0131	1.1376	1.3047	1.4445	1.5689		
0.025	1.0819	1.2649	1.4772	1.6388	1.7758	1.8984	
0.010	1.2531	1.5210	1.7830	1.9646	2.1121	2.2412	2.3586

Bis auf die oben besprochenen zwei »Schnitte« durch das *Sundman*sche Konvergenzdreieck [Fälle 1) u. 3)], die dem asteroidischen Fall entsprechen, ist also die analytische Lösung nur bei mäßigen Massenverhältnissen möglich, wie man aus den letzten Tafeln ohne weiteres ersieht.

2. Die Untersuchung der kurzperiodischen Störungen von a, e und ϖ für den Typus $^5/_3$ bedurfte noch der Berechnung der *Laplace*schen B^i- und C^i-Koeffizienten. Statt dieser Größen führe ich die c^i- und e^i-Koeffizienten an, die mit jenen durch die Formeln

$$c^i = (a'/\alpha)\, B^i \qquad e^i = (a'/\alpha^2)\, C^i$$

zusammenhängen.

c^0	9.259870	c^{11}	0.5565	e^0	72.86926	e^{11}	11.8379
c^1	8.138923	c^{12}	0.4109	e^1	70.63336	e^{12}	9.2738
c^2	6.68579	c^{13}	0.3030	e^2	65.2395	e^{13}	7.2206
c^3	5.30977	c^{14}	0.2235	e^3	58.0983	e^{14}	5.5894
c^4	4.13084	c^{15}	0.1652	e^4	50.3064	e^{15}	4.3011
c^5	3.16900	c^{16}	0.1229	e^5	42.6074	e^{16}	3.2873
c^6	2.40656	c^{17}	0.093	e^6	35.4512	e^{17}	2.4892
c^7	1.81354	c^{18}	0.072	e^7	29.0704	e^{18}	1.8570
c^8	1.35839	c^{19}	0.059	e^8	23.5506	e^{19}	1.3476
c^9	1.01255	c^{20}	0.05	e^9	18.8837	e^{20}	0.9224
c^{10}	0.7518			e^{10}	15.0088		

Ich gebe noch die Werte von a_0 und a', wie sie aus den Ausdrücken

$$a_0^{\,3}\cdot 5^2 = 1 \qquad a'^3\cdot 3^2 = 1+m'$$

folgen, $\log m' = 6.979906_{-10}$ gesetzt, an. Danach ist:

$$\log a_0 = 9.53402_{-10} \qquad \log a' = 9.68205_{-10}\,.$$

Bei den angenommenen Längen- und Zeiteinheiten und dem Massenwerte des störenden Körpers (Jupiter) lauten nun die gestörten Werte von

$$\sqrt{a}, \qquad \sqrt[4]{a}\cdot e\cos\varpi \text{ und } \sqrt[4]{a}\cdot e\sin\varpi$$

(Störungen I. Ordnung) folgendermaßen:

$$\sqrt{a} = 9.76701_{-10} +$$

$$+ 6.3067_{-10}\cos 2t + e_0'\,[7.8014_{-10}\cos t + e_0\,[7.4021_{n\,-10}\cos t$$

$$6.6984\cos 4t \qquad 7.5128\cos 3t \qquad 7.3856_n\cos 3t$$
$$6.4780\cos 6t \qquad 7.3467\cos 5t \qquad 7.2471_n\cos 5t$$
$$6.2762\cos 8t \qquad 7.1576\cos 7t \qquad 7.1466_n\cos 7t$$
$$6.0854\cos 10t \qquad 6.974\cos 9t \qquad 6.756_n\cos 9t$$
$$5.902\cos 12t \qquad 6.795\cos 11t \qquad 6.510_n\cos 11t$$
$$5.723\cos 14t \qquad 6.621\cos 13t \qquad 6.258_n\cos 13t$$
$$5.548\cos 16t \qquad 6.451\cos 15t \qquad 5.99_n\cos 15t$$
$$5.377\cos 18t \qquad 6.283\cos 17t] \qquad 5.71_n\cos 17t]$$
$$5.207\cos 20t$$
$$5.040\cos 22t$$
$$4.87\cos 24t$$
$$4.71\cos 26t$$

$\sqrt[4]{a \cdot e} \sin \varpi =$

$7.91885_{n\,-10} \sin\ t + e_0' [8.89368_{-10} \sin\ 2t + e_0 [8.91516_{n\,-10} \sin\ 2t$

$7.20428_n \sin\ 3t$	$8.57754 \sin\ 4t$	$8.59087_n \sin\ 4t$
$6.8991_n \sin\ 5t$	$8.40365 \sin\ 6t$	$8.38903_n \sin\ 6t$
$6.5589_n \sin\ 7t$	$8.23564 \sin\ 8t$	$8.23079_n \sin\ 8t$
$5.904_n \sin\ 9t$	$8.08433 \sin 10t$	$8.08015_n \sin 10t$
$5.436_n \sin 11t$	$7.9352 \sin 12t$	$7.9260_n \sin 12t$
$4.86_n \sin 13t$	$7.7885 \sin 14t$	$7.7762_n \sin 14t$
	$7.6437 \sin 16t$	$7.6287_n \sin 16t$
	$7.5000 \sin 18t$	$7.4829_n \sin 18t$
	$7.3571 \sin 20t$	$7.3377_n \sin 20t$
	$7.2146 \sin 22t$	$7.1940_n \sin 22t$
	$7.0724 \sin 24t$	$7.0504_n \sin 24t$
	$6.930 \sin 26t$	$6.907_n \sin 26t$
	$6.789 \sin 28t$	$6.764_n \sin 28t$
	$6.648 \sin 30t$	$6.621_n \sin 30t$
	$6.507 \sin 32t$	$6.479_n \sin 32t$
	$6.366 \sin 34t]$	$6.337_n \sin 34t]$

$\sqrt[4]{a \cdot e} \cos \varpi = 9.88350_{-10}\, e_0 +$

$+ 6.7518_{n\,-10} \cos\ t + e_0' [7.2041_{n\,-10} \cos\ 2t + e_0 [6.307_{-10} \cos\ 2t$

$6.7144 \cos\ 3t$	$6.813_n \cos\ 4t$	$5.837_n \cos\ 4t$
$6.3402 \cos\ 5t$	$7.2341 \cos\ 6t$	$6.684_n \cos\ 6t$
$6.3033 \cos\ 7t$	$7.1609 \cos\ 8t$	$6.990_n \cos\ 8t$
$6.4090 \cos\ 9t$	$7.0902 \cos 10t$	$6.922_n \cos 10t$
$6.2605 \cos 11t$	$6.959 \cos 12t$	$6.794_n \cos 12t$
$6.1019 \cos 13t$	$6.813 \cos 14t$	$6.480_n \cos 14t$
$5.940 \cos 15t$	$6.660 \cos 16t$	$6.238_n \cos 16t$
$5.717 \cos 17t$	$6.506 \cos 18t]$	$5.97_n \cos 18t]$
$5.614 \cos 19t$		
$5.451 \cos 21t$		
$5.289 \cos 23t$		
$5.127 \cos 25t$		
$4.96 \cos 27t$		

Wird in diesen Formeln an Stelle von e_0' der Exzentrizitätswert der Jupiterbahn ($\log e_0' = 8.68403_{-10}$) angenommen, so ist, auf Grund der in der ersten Abteilung dieses Paragraphen gemachten Überlegungen, der innerhalb des *Sundman*schen Kriteriums korrespondierende Wert von e_0, bei welchem eine periodische Lösung eintritt, auf $\log e_0 = 8.76876_{-10}$ (Anfangskonstellation $5M_0 - 3M_0' = 180° \cdot h$, h gerade, $\Delta\varpi = 0$) resp. $\log e_0 = 8.86180_{-10}$ (h ungerade, $\Delta\varpi = 0$) festzusetzen.

Bei Zugrundelegung der ersten Konstellation ($\log e_0 = 8.76876_{-10}$) stellten sich auf der einen Hälfte des durch die Symmetrieachse $t = 0, \pi$ halbierten Umfanges die folgenden 20° voneinander abstehenden Werten von t entsprechenden Werte von a, e und ϖ heraus:

t	$\log a$	$\log e$	ϖ	t	$\log a$	$\log e$	ϖ
0°	9.53666	8.7796	0° 0′	100°	9.53407	8.7762·	−8° 57′
20	399	8.7670	−8 21	120	371	8.7809·	−7 49
40	358	8.7676	−9 18	140	323	8.7783·	−6 28
60	387	8.7683·	−9 34	160	353	8.7751	−5 3
80	9.53420	8.7724·	−9 26	180	9.53599	8.7568	0 0

$\log a_0 = 9.53402 \quad \log e_0 = 8.7688 \quad \varpi_0 = 0° 0'.$

Charakteristisch ist an der Bewegung der Apsidenlinie, daß sie zwischen beträchtlichen Werten, etwa −9°.6 bis +9°.6, pendelt und ihre größte Geschwindigkeit zur Zeit der Konjunktion entwickelt.

Von Interesse wird noch die Bemerkung sein, daß im Falle des Nullsetzens von e_0 und e_0' (periodische Lösung erster Sorte) die Apsidenlinie des Planetoiden eine ausgesprochene Tendenz zeigt, um die Senkrechte der Konjunktionslinie zu oszillieren, und nur gerade während der Konjunktion mit der Apsidenlinie des störenden Körpers zusammenzufallen.

§ 4. Typus $^7/_5$.

1. Die entsprechenden Tafeln für P, Q, R, in ihrer Abhängigkeit von $a' A^i_j$, und die numerischen Werte der letzteren, auf Grund von

$$\alpha = (1+m')^{-1/3} \cdot (^5/_7)^{2/3} = 0.79880926$$

sowie der P, Q, R selbst ergeben sich bei diesem Typus wie folgt:

	i	$a' A^i$	$a' A^i_1$	$a' A^i_2$	$a' A^i_3$	$a' A^i_4$
$4P_{02}$	5	+ 74.5	+13	+1		
$4P_{11}$	6	−156	−26	−2		
$4P_{20}$	7	+ 80.5	+13	+1		
$16P_{04}$	10	+ 15359	+ 8236:3	+ 344	+ 27	+ 1
$16P_{13}$	11	− 181192:3	− 31972:3	− 1336	− 106	− 4
$16P_{22}$	12	+ 88752	+15499	+1945	+156	+ 6
$16P_{31}$	13	− 57798	− 30026:3	− 1258	− 102	− 4
$16P_{40}$	14	+ 42245:3	+ 7265:3	+ 305	+ 25	+ 1
$16Q_{04}$	5	− 3771	− 1609:3	+ 65	+ 36	+ 4
$16Q_{13}$	6	+ 13578	+ 1983	− 135	− 102	− 12
$16Q_{22}$	7	− 15778	− 2361	+ 75	+ 96	+ 12
$16Q_{31}$	8	+ 5960	+ 2735:3	− 5	− 30	− 4
$16R_{13}$	4	+ 5884:3	+ 829:3	− 71	− 34	− 4
$16R_{22}$	5	− 7450	− 1125	+ 159	+ 96	+ 12
$16R_{31}$	6	+ 8970	+ 1425	− 105	− 90	− 12
$16R_{40}$	7	− 10409:3	− 1721:3	+ 17	+ 28	+ 4

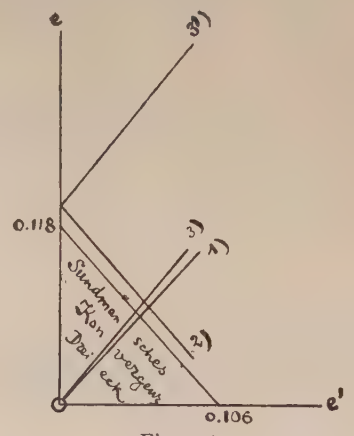
i	$a' A^i$	$a' A^i_1$	$a' A^i_2$	$a' A^i_3$	$a' A^i_4$
0	2.537571·	1.956606	4.708599	12.70080	38.35967
1	1.140587·	2.449403	4.669819	12.78645	38.43122
2	0.713457	2.351917	5.026745	12.92881	38.69638
3	0.486101	2.130177	5.306762	13.35732	39.13153
4	0.344817	1.87555	5.43164·	13.9469	39.8850·
5	0.250461	1.62311·	5.40182·	14.5496	40.9918·
6	0.184798	1.38819·	5.24280·	15.0503	42.3786
7	0.137881	1.17706·	4.98646·	15.3760	43.9080
8	0.103740·	0.99145	4.66352	15.4911	45.4203·
9	0.078564	0.83072	4.30046·	15.3888	46.7643·
10	0.059809·	0.69307·	3.91864	15.0825·	47.8142
11	0.045727·	0.57617	3.53466·	14.5967	48.4842
12	0.035086	0.47755	3.16029	13.9658	48.7073
13	0.027003	0.39478	2.80432	13.2186·	48.4991
14	0.020836	0.32563·	2.47154	12.3974	47.7908

S_2	+ 1.666301	P_{02}	+ 11.290412	Q_{04}	− 48.50917
S_{04}	+17.35209	P_{11}	− 18.851788	Q_{13}	+156.9078
S_{22}	+52.18555	P_{20}	+ 7.846930	Q_{22}	−161.0974
S_{40}	+ 9.57384			Q_{31}	+ 79.41831
		P_{04}	+ 289.0244		
Σ_{11}	− 2.989317	P_{13}	− 960.3589	R_{13}	+ 10.94980
		P_{22}	+1195.8244	R_{22}	− 59.02396
Σ_{13}	−59.38261	P_{31}	− 661.3796	R_{31}	+ 76.39064
Σ_{22}	+24.84305	P_{40}	+ 137.0958	R_{40}	− 28.91961
Σ_{31}	−44.37563				

Das *Sundman*sche Konvergenzdreieck bilden in diesem Fall die Exzentrizitätswerte:

e'	e
0.0000	0.1183
0.0250	0.0906
0.0500	0.0628
0.0750	0.0348
0.1000	0.0007
0.1058	0.0000

und die den asteroidischen Fall charakterisierenden Schnitte stellen in Figur 5 die Kurven 1) und 3) dar. (Sonst gelten analoge Bemerkungen wie für den Typus $^5/_3$).



Figur 5.

Die Erweiterung dieses Ergebnisses auf allgemeine periodische Lösungen enthalten die folgenden Tafeln:

Fall 2) h gerade, h' ungerade, $\Delta\varpi = 180°$.

Tafel für f.

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100
0.118	30.054				
0.100	12.965	9.757			
0.075	8.912	3.714			
0.050	5.768	2.318	1.217		
0.025	2.828	1.122	0.563	0.400	
0.010	1.113	0.441	0.220	0.148	0.113

Tafel für $\log f_1$.

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100
0.118	9.7508_{n-10}				
0.100	0.6030_n	9.8953_{n-10}			
0.075	0.9164_n	0.8273_n			
0.050	1.0845_n	1.1157_n	0.9805_n		
0.025	1.2373_n	1.3721_n	1.4314_n	1.2411_n	
0.010	1.4390_n	1.6774_n	1.8325_n	1.7953_n	2.5780_n

Fall 4) h, h' beide ungerade, $\Delta\varpi = 180°$.

Tafel für f.

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100
0.118	12.349				
0.100	10.434	4.219			
0.075	7.797	3.152			
0.050	5.186	2.096	1.057		
0.025	2.596	1.048	0.528	0.353	
0.010	1.045	0.421	0.211	0.141	0.106

Tafel für $\log f_1$.

e \ e'	0.010	0.025	0.050	0.075	0.100
0.118	1.4685				
0.100	1.4420	1.5390			
0.075	1.3149	1.5244			
0.050	1.4085	1.5406	1.7283		
0.025	1.4583	1.6437	1.8725	2.0574	
0.010	1.6169	1.8850	2.1614	2.3653	2.5383

Diese Tafeln sind wieder dahin zu deuten, daß die analytische Lösung, bis auf die oben hervorgehobenen zwei Schnitte des asteroidischen Falles, mittlere Massenverhältnisse verlangt. Während aber der asteroidische Fall für zusammenfallende Perihele statthat, kommen die allgemeinen periodischen Lösungen nur für $\Delta\varpi = 180°$ zustande. Analog, wie beim Typus $(p+1)/p$, läßt sich auch bezüglich des Typus $(p+2)/p$ die Bemerkung machen, daß der durchschnittliche Wert der Massenverhältnisse, bei denen allgemeine periodische Lösungen auftreten, in der Richtung vom Typus $^3/_1$ über $^5/_3$ nach $^7/_5$ ständig abnimmt.

2. Zum Schluß habe ich für diesen Typus auch das sogenannte problème restreint betrachtet.

Es geht bekanntlich von der Voraussetzung aus, daß der Bewegungsvorgang des Planetoiden ($m = 0$) sich in der Ebene des in kreisförmig angenommener Bahn ($e' = 0$) laufenden Jupiter abspielt.

Die Bewegungsgleichungen des Problems lauten:

$$\frac{d\sqrt{a}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e\sqrt{a}}\left(\frac{\partial F}{\partial \varpi} + [1-\sqrt{(1-e^2)}]\frac{\partial F}{\partial l}\right)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = 7n' - 5n + 10\sqrt{a}\cdot\frac{\partial F}{\partial a} - \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e\sqrt{a}}[(7-5\sqrt{(1-e^2)}]\frac{\partial F}{\partial e}$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e\sqrt{a}}\frac{\partial F}{\partial e}$$

wo $F = (m'/a') \times$
$\times [S_0 + S_2 e^2 + S_{40} e^4 + (P_{20} + R_{40} e^2) e^2 \cos\zeta + P_{40} e^4 \cos 2\zeta]$
und n, n' die mittleren Bewegungen sind.

Die beiden ersten dieser Gleichungen führen auf die Differentialgleichung

$$\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = -\frac{5e\,de}{[7-5\sqrt{(1-e^2)}]\sqrt{(1-e^2)}}$$

deren Integration das *Jacobi*sche Integral:

$$\sqrt{a}\cdot[7-5\sqrt{(1-e^2)}] = 2\sqrt{a_0} = \text{konst.}$$

oder auch $\sqrt{a} = \sqrt{a_0}\cdot[1 - {}^5/_4 e^2 + {}^5/_4 e^4 - \cdots]$

resp. $n = n_0\,[1 + {}^{15}/_4 e^2 + {}^{45}/_8 e^4 + \cdots]$

liefert.

Der periodische Vorgang wird hier effektiv dadurch zustande gebracht, daß dem Planetoidenperihel eine Bewegung, die gleich dem Überschuß der Kommensurabilität ${}^1/_2(7n' - 5n_0)$ ist, aufgezwungen wird. Diese Bedingung wie die des Nichtauftretens der säkularen Änderungen von a und e läßt sich in folgende Formeln übertragen:

$$d\zeta/dt = 0 \qquad de/dt = 0 \qquad da/dt = 0$$

oder explizite:

$$\text{(B)}\quad \begin{aligned} d\zeta/dt &= z_0 + z_1 e^2 + (z_2 + z_3 e^2)\cos\zeta + z_4 e^2 \cos 2\zeta = 0 \\ de/dt &= {}^1/_2 e \sin\zeta\,[z_2 + (z_2 + {}^1/_2 z_3) e^2 + 2 z_4 e^2 \cos\zeta] = 0 \end{aligned}$$

wo in *Wilkens*' Bezeichnung [1])

$$\begin{aligned} z_0 &= 7n' - 5n_0 + 2m' n_0 \alpha_0 (5\alpha_0 S_0' - 2S_2) \\ z_1 &= -{}^{75}/_4 n_0 - m' n_0 \alpha_0 (25\alpha_0^2 S_0'' + {}^{25}/_2 \alpha_0 S_0' - 20\alpha_0 S_2' + \\ &\qquad + 8S_2 + 8S_{40}) \\ z_2 &= -4m' n_0 \alpha_0 P_{20} \\ z_3 &= +m' n_0 \alpha_0 (20\alpha_0 P_{20}' - 8P_{20} - 8R_{40}) \\ z_4 &= -8m' n_0 \alpha_0 P_{40} \end{aligned}$$

schon Gebrauch vom *Jacobi*schen Integral gemacht worden ist, und S', S'' die erste resp. zweite Derivierte nach α bedeuten. Die dritte Gleichung für ϖ lautet in extenso:

$$\begin{aligned} d\varpi/dt = 2m' n_0 \alpha_0 \big(&S_2 - ({}^5/_2 \alpha_0 S_2' - {}^3/_4 S_2 - 2S_{40}) e^2 + \\ &+ [P_{20} - ({}^5/_2 \alpha_0 P_{20}' - {}^3/_4 P_{20} - 2R_{40}) e^2] \cos\zeta \\ &+ 2P_{40} e^2 \cos 2\zeta\big)\,. \end{aligned}$$

Die Gleichung $de/dt = 0$ spaltet sich in zwei Teile. Ist erstens $\sin\zeta = 0$, also

$$7l' - 5l - 2\varpi = 0^\circ \text{ oder } 180^\circ$$

so haben wir es mit der Klasse der symmetrischen periodischen Lösungen zu tun, und es ist dann

$$e^2 = (z_0 \pm z_1)/(z_1 \pm z_3 + z_4)\,;$$

andererseits definiert die Gleichung

$$z_2 + (z_2 + {}^1/_2 z_3) e^2 + 2 z_4 e^2 \cos\zeta = 0$$

die Klasse der *Wilkens*schen asymmetrischen periodischen Lösungen, für welche sich ergibt:

$$\cos\zeta = -\frac{z_2 + (z_2 + {}^1/_2 z_3) e^2}{2 z_4 e^2}$$

$$e^2 = -\frac{z_0 z_1 + {}^1/_2 z_2^2 - {}^1/_4 z_2 z_3}{z_1 z_2 + {}^1/_2 z_2^2 - {}^1/_8 z_3^2 - z_1^2}\,.$$

[1]) Astron. Abh. Nr. 17.

Zur Auswertung dieser Formeln bedürfen wir noch folgender Ausdrücke:

$$\begin{aligned} 4\alpha_0 P_{20}' &= 93.5 a' A_1^7 + 28 a' A_2^7 + 3 a' A_3^7 \\ 4\alpha_0 S_2' &= a' A_1^0 + 4 a' A_2^0 + 3 a' A_3^0 \\ \alpha_0^2 S_0'' &= a' A_2^0 \\ \alpha_0 S_0' &= {}^1/_2 a' A_1^0\,. \end{aligned}$$

Ich stelle nun die numerischen Werte der *Laplace*schen Transzendenten und der Koeffizienten S, P, R für $n_0 = 408''.77973$ mit denjenigen, die sich schon teilweise oben für die Kommensurabilitätsstelle $n_\chi = 418''.77973$ ergaben, zusammen:

	$n_0 = 408''.77973$	$n_\chi = 418''.77973$
α	0.81178463	0.79880926
$a' A_1^0$	2.154770	1.956606
$a' A_2^0$	5.570606	4.708599
$a' A_3^0$	16.32761	12.70080
$a' A_4^0$	53.51338	38.35967
$a' A^7$	0.1583851	0.1378809
$a' A_1^7$	1.373991	1.177065
$a' A_2^7$	6.00171	4.98646
$a' A_3^7$	19.5402	15.3760
$a' A_4^7$	60.3449	43.9080
$a' A^{14}$	0.0268344	0.0208362
$a' A_1^{14}$	0.423383	0.325635
$a' A_2^{14}$	3.26220	2.47154
$a' A_3^{14}$	16.7599	12.3974
$a' A_4^{14}$	67.1929	47.7908
$\alpha_0 S_0'$	+ 1.077385	+ 0.978303
$\alpha_0^2 S_0''$	+ 5.570606	+ 4.708599
S_2	+ 1.931344	+ 1.666301
$\alpha_0 S_2'$	+ 18.35501	+ 14.72335
S_{40}	+ 13.09518	+ 9.57384
P_{20}	+ 9.240901	+ 7.846930
$\alpha_0 P_{20}'$	+ 88.78423	+ 73.95115
P_{40}	+176.0709	+137.0958
R_{40}	− 27.95128	− 28.91961

Alsdann sind die in den Gleichungen (B) zur Anwendung gelangenden Koeffizienten z, in Logarithmen ausgedrückt:

log	n_0	n_χ
z_0	1.707279	9.998187_{-10}
z_1	3.882797_n	3.893667_n
z_2	1.068610_n	1.001095_n
z_3	2.785350	2.721188
z_4	2.649614_n	2.544449_n

und mit ihrer Hilfe konnte der Aufschluß über die Größe der Exzentrizität und Perihelbewegung im Falle der symmetrischen resp. asymmetrischen Lösung gewonnen werden. Das Ergebnis ist in der folgenden Tafel enthalten.

	n_0	n_χ	
e	0.072486	—	instabile [1]) symmetrische
$d\varpi/dt$	7″.28917	—	Lösungen des Falles
λ_1	415″.86407	—	$\zeta = 0°$
e	0.084922	0.035582	stabile symmetrische
$d\varpi/dt$	−1″.86791	−3″.54815	Lösungen des Falles
λ_1	419″.52689	420″.19899	$\zeta = 180°$
e	—	0.113791	
$d\varpi/dt$	—	−1″.10097	instabile asymmetrische
λ_1	—	419″.22012	Lösungen
ζ	—	$180° \pm 41° 56' 23''$	

wo λ_1 die mittlere Bewegung in Länge bedeutet.

Auf Grund dieser Zahlen zeigt sich, daß die symmetrischen Lösungen dieses Typus, in Analogie mit dem Hestiatypus, wesentlich nur auf einer Seite der Kommensurabilitätsstelle ($n < n_\chi$) auftreten, und das Gebiet der asymmetrischen Lösungen die allerengste Umgebung von n_χ umfaßt.

[1]) nach *A. Wilkens*, Astr. Abh. 17, p. 4–5.

Ich, *Felicyan Kępiński,* katholischer Konfession, bin am 29. April 1885 zu Piotrków in Russisch-Polen, als Sohn des Staatsbeamten *F. K. Kępiński,* geboren. Im Jahre 1895 trat ich in das klassische (humanistische) Gymnasium zu Piotrków ein und verließ es mit dem Zeugnis der Reife 1903. Das Schuljahr 1903—04 verbrachte ich darauf an der Warschauer Universität, die aber Ende 1904 geschlossen wurde. Im Herbst 1905 kam ich alsdann nach Deutschland und ließ mich zuerst an der Leipziger, 1906 an der Göttinger und 1909 an der Berliner Universität immatrikulieren. An diesen Lehrstätten hörte ich Vorlesungen resp. Übungen bei den Herren: *Ambronn, Cohn, Herglotz, Hilbert, Hölder, Klein, Koebe, Minkowski, Riecke, Rohn, Runge, Schwarz, Schwarzschild, Struve, Wiener, Witt.*

Allen diesen Herren Dozenten, vor allem Herren Professoren *Cohn, Schwarz, Schwarzschild* und *Struve,* spreche ich hiermit meinen aufrichtigsten Dank aus. Ich möchte auch nicht die Gelegenheit versäumen, an dieser Stelle zu versichern, wie sehr ich mich Herrn Dr. *E. Finlay Freundlich* für seinen mannigfachen Rat während meiner letztjährigen Studien verpflichtet fühle.